



Universidad del Istmo

Campus Tehuantepec

División de Estudios de Posgrado
Maestría en Ciencias en Energía Eólica

El efecto del movimiento giroscópico del rotor en las deflexiones de los álabes de un aerogenerador de baja potencia

T E S I S

que para obtener el título de:
Maestro en Ciencias en Energía Eólica

Presenta:

Ing. Eusebio García Vásquez

Director:

Dr. Ociel Flores Díaz

Santo Domingo Tehuantepec, Oaxaca. Junio de 2021.

Agradecimientos

A mi familia que siempre me ha apoyado, a mi padre *E. Eusebio García Zarate* gracias por haberme enseñado valores, por los consejos y experiencias de vida. Que en paz descansa, gracias por todo. A mi madre *María Paula Vásquez Robles* por la labor más noble del mundo, el ser madre; por sus cuidados, atenciones, amor y apoyo incondicional. A mis hermanos y hermanas por todo el apoyo.

A mi director de tesis *Dr. Ociel Flores Díaz*, por todos los conocimientos de cinemática y dinámica sin los cuales no hubiera sido posible este trabajo de tesis, por su paciencia, amabilidad, apoyo y amistad.

Al *M.D.M. José Rafael Dorrego Portela* por todo su apoyo y conocimientos transmitidos de aerodinámica.

A mis revisores de tesis, *Dr. Víctor Iván Moreno Oliva, Dr. Edwin Román Hernández* y *Dr. Isaac Montoya De Los Santos* por sus recomendaciones y sugerencias.

A mis compañeros y amigos de maestría con quienes compartí gratos momentos. Gracias por su amistad y compañerismo, *Juan Carlos, Alan, Armando, Eduardo, María de los Ángeles, Fidel y Guillermo*.

Al CONACYT, por el apoyo económico brindado durante el desarrollo de mi tesis.

Resumen

El problema principal en que este trabajo de tesis se ocupa, es determinar las cargas inerciales que causan el efecto giroscópico en los aerogeneradores y determinar como influyen dichas cargas en la deflexión de los álabes.

Se presenta una metodología explícita de diseño de álabes para aerogeneradores de eje horizontal, se aplica dicha metodología para diseñar el álabe de un aerogenerador de 10 kW de potencia. Se determinan las cargas aerodinámicas del álabe diseñado para velocidades de viento de 3m/s, 11m/s y 18m/s. Enseguida, se modela la deflexión del álabe considerando que éste presenta una variación de cuerda y rigidez a lo largo de su eje longitudinal, para tal hecho se divide el álabe en secciones y se considera a cada sección como elementos finitos de viga, posteriormente se realiza una formulación de elementos finitos el cual representa un modelo aproximado del álabe.

Se aborda el modelado cinemático del aerogenerador. Para ello, se emplea el método de Denavit-Hartenberg mediante el cual se obtiene el modelo cinemático que describe la posición de la punta del álabe. Se hace uso del vector axial para obtener las derivadas primera y segunda de dicho modelo de posición con los cuales se determina la velocidad y aceleración lineal del mecanismo. Para determinar la evolución de la posición, velocidad y aceleración en las juntas articulares de dicho mecanismo se realiza la planeación de trayectoria del espacio articular considerando condiciones iniciales, intermedias y finales de recorrido tal que permitan movimientos suaves desde su arranque hasta el final utilizándose para ello funciones polinomiales. Para el caso específico del rotor eólico la planeación de trayectoria toma en cuenta la trayectoria que permite extraer la potencia máxima de éste el cual está en función de la velocidad específica de diseño y la velocidad del viento. Para planear la trayectoria mas óptima de la góndola se emplea un polinomio de séptimo grado el cual permite introducir un parámetro adimensional que está relacionado con la eficiencia de la trayectoria e imponiendo condiciones de inicio y fin de recorrido se halla los modelos que permite la reorientación de éste en función de la dirección del viento.

Se aborda el modelado dinámico del aerogenerador. Aplicando la dinámica de Lagrange se determinan los torques requeridos en las juntas articulares tal que satisfagan la cinemática del aerogenerador y aplicando las ecuaciones dinámicas de Newton-Euler se determinan las cargas inducidas en la raíz del álabe. En especial se determinan las cargas inducidas en el álabe que provocan la deflexión del álabe fuera del plano rotor el cual se debe al efecto giroscópico. Se determina la deflexión del álabe considerando la sumatoria de fuerzas aerodinámicas con fuerzas giroscópicas inducidas y se realiza una comparación con la deflexión obtenida considerando exclusivamente fuerzas aerodinámicas.

Índice general

Agradecimientos	ii
Resumen	iii
Índice de figuras	vi
Índice de tablas	viii
1 Introducción	1
1.1 Estado del arte	2
1.2 Planteamiento del problema	3
1.3 Objetivos	4
1.3.1 Objetivo general	4
1.3.2 Objetivos específicos	4
1.4 Justificación	4
1.5 Hipótesis	4
2 Diseño del álabe	5
2.1 Introducción	5
2.2 Teoría aerodinámica de rotores	5
2.2.1 Teoría del disco áctuator	5
2.2.2 Teoría del elemento del álabe	10
2.2.3 Teoría del momentum del elemento del álabe	12
2.3 Metodología de diseño de álabes	15
2.3.1 Definir los requerimientos y especificaciones de diseño	15
2.3.2 Selección de perfiles aerodinámicos	16
2.3.3 Especificaciones de los perfiles aerodinámicos a lo largo del álabe	17
2.3.4 Selección de perfiles aerodinámicos	17
2.3.5 Estimación del coeficiente de potencia	19
2.3.6 Determinar el diámetro de diseño del rotor eólico	19
2.3.7 Determinar la geometría del álabe	20
2.3.8 Elegir una distribución lineal de cuerda y torsión	21
2.3.9 Determinar el desempeño del álabe	21
2.4 Aplicación de la metodología para el diseño de un álabe de 10 kW de potencia	23
2.5 Conclusiones	29
3 Determinación de las deflexiones del álabe bajo cargas aerodinámicas	30
3.1 Introducción	30
3.2 Ecuación general de un elemento finito de viga	30

3.3	Deformación axial	35
3.4	Deformación transversal	42
3.5	Validación del modelado empleando una viga de sección transversal constante	44
3.6	Determinación de las deflexiones del álabe aplicando cargas aerodinámicas	46
3.7	Conclusiones	47
4	Modelado cinemático del aerogenerador	48
4.1	Introducción	48
4.2	Determinación de modelos cinemáticos de posición, velocidad y aceleración lineal	49
4.3	Determinación de la trayectoria del espacio articular del rotor	55
4.3.1	Determinación de las funciones de trayectoria de la góndola	56
4.3.2	Determinación de la función de trayectoria del rotor eólico	58
4.4	Determinación de la velocidad y aceleración de la punta del álabe	62
4.5	Conclusiones	62
5	Modelado dinámico del aerogenerador	63
5.1	Introducción	63
5.2	La dinámica de Euler-Lagrange	63
5.2.1	Energía cinética	64
5.2.2	Energía potencial	65
5.2.3	Determinación del torque en las juntas articulares θ_1 y θ_2	65
5.3	Las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler	68
5.3.1	Determinación de las ecuaciones de movimiento para el mecanismo de reorientación del aerogenerador	69
5.3.2	Resultados de los momentos determinados en la raíz del álabe	71
5.3.3	Determinación del comportamiento del momento giroscópico en un ciclo del rotor	73
5.4	Conclusiones	74
6	Resultados y conclusiones	75
6.1	Introducción	75
6.2	Determinación de la deflexión transversal debido a cargas aerodinámicas e inerciales	75
6.3	Conclusiones	77
	Apéndices	79
	Apéndice A Teoría de vigas	80
	Apéndice B Propiedades del álabe	91
	Apéndice C Análisis de posición con el método de Denavit-Hartenberg	92
	Bibliografía	94

Índice de figuras

Figura 2.1	Disco actuador y tubo de corriente.	6
Figura 2.2	Barrido del anillo anular en el tubo de corriente.	9
Figura 2.3	Velocidades y fuerzas del elemento del álabe.	11
Figura 2.4	Zonas típicas del álabe.	16
Figura 2.5	Comportamiento de la potencia unitaria a lo largo del álabe. . . .	17
Figura 2.6	Distribución de espesor relativo en el álabe.	17
Figura 2.7	Comportamiento de C_l después de alcanzar su máximo valor. . . .	18
Figura 2.8	Coefficiente de potencia (C_p) en función de la velocidad específica (λ).	19
Figura 2.9	Secciones del álabe.	20
Figura 2.10	Diagrama de flujo para determinar la geometría del álabe.	21
Figura 2.11	Diagrama de flujo para determinar el desempeño del álabe.	22
Figura 2.12	Potencia versus número de secciones.	24
Figura 2.13	Variación lineal y teórica de cuerda y torsión.	24
Figura 2.14	Comparación del álabe teórico y álabe lineal.	25
Figura 2.15	Distribución de torsión teórica y torsión lineal.	25
Figura 2.16	Coefficiente de potencia en función de la velocidad específica y potencia en función de la velocidad angular.	25
Figura 2.17	Potencia y torque en función de la velocidad del viento.	27
Figura 2.18	Fuerza normal distribuida y fuerza tangencial distribuida a lo largo del álabe para el caso I.	27
Figura 2.19	Fuerza normal distribuida y fuerza tangencial distribuida a lo largo del álabe para el caso II.	27
Figura 2.20	Fuerza normal distribuida y fuerza tangencial distribuida a lo largo del álabe para el caso III.	28
Figura 2.21	Fuerza axial a lo largo del álabe.	29
Figura 3.1	Resorte sujeto a deformación axial.	35
Figura 3.2	Elemento de resorte con desplazamientos nodales positivos. . . .	36
Figura 3.3	a) Función de desplazamiento b) Función de forma N_1 c) Función de forma N_2 en el dominio del elemento.	37
Figura 3.4	Ensamblado de dos resortes.	39
Figura 3.5	Ensamblado de tres resortes.	41
Figura 3.6	Elemento de viga sometido a desplazamientos, fuerzas, rotaciones y momentos nodales.	43
Figura 3.7	a) Viga en voladizo. b) Discretización de la viga en elementos finitos.	45
Figura 3.8	a) Deflexión de la viga calculado. b) Validación de la deflexión de la viga en un software comercial.	45

Figura 3.9	Formulación de la viga mediante elementos finitos.	46
Figura 3.10	a) Deformación del álabe calculado. b) Validación de la deflexión del álabe en un software.	47
Figura 4.1	Asignación de marcos de referencia en las juntas articulares del aerogenerador.	49
Figura 4.2	Representación gráfica del aerogenerador.	51
Figura 4.3	Representación gráfica de la variación de la góndola, θ_1	52
Figura 4.4	Representación gráfica de la variación del rotor eólico, θ_2	52
Figura 4.5	Trayectoria de la función de posición de la junta articular.	55
Figura 4.6	Trayectoria de la junta articular de la góndola.	58
Figura 4.7	Comportamiento típico de la velocidad angular en función de la velocidad del viento.	59
Figura 4.8	Trayectorias angulares del rotor eólico.	61
Figura 4.9	Trayectorias angulares del rotor eólico durante un cambio de velocidad del viento de 10 m/s a 11.2 m/s	61
Figura 4.10	Velocidad y aceleración angular de la punta del álabe.	62
Figura 5.1	Ubicación de los centros de masa.	66
Figura 5.2	Torque en las juntas articulares θ_1 y θ_2	67
Figura 5.3	Torque en la junta 1 debido a las fuerzas inerciales.	67
Figura 5.4	Torque en junta 2 debido a las fuerzas inerciales.	68
Figura 5.5	Marcos de referencia en el eje de referencia del rotor.	69
Figura 5.6	a) Trayectoria articular del rotor eólico durante un cambio de velocidad del viento de 10 m/s a 11.2 m/s . b) Trayectoria de la junta articular de la góndola.	72
Figura 5.7	Momentos generados en los ejes principales de la junta θ_2 : caso 1.	72
Figura 5.8	Momentos generados en los ejes principales de la junta θ_2 : caso 2.	73
Figura 5.9	Momentos generados en los ejes principales de la junta θ_2 : caso 3.	73
Figura 5.10	Momentos generados sobre la raíz del álabe vs $\theta_2, \theta_2 \in [0, 2\pi]$: caso 1.	74
Figura 5.11	Momentos generados sobre la raíz del álabe vs $\theta_2, \theta_2 \in [0, 2\pi]$: caso 3.	74
Figura 6.1	Distribución de fuerza normal debido al momento giroscópico a lo largo del eje longitudinal del álabe. a) Tiempo de reorientación 1s b) Tiempo de reorientación 10s c) Tiempo de reorientación 20s	76
Figura 6.2	Deflexión del álabe debido a fuerzas aerodinámicas y giroscópicas.	76
Figura A.1	a) Viga de Euler-Benoulli b) Sección AB en detalles.	81
Figura A.2	a) viga de Timoshenko. b) sección transversal.	83
Figura A.3	a) Antes de la deformación. b) Después de la deformación.	84
Figura A.4	Representación de esfuerzos internos en la viga.	87
Figura C.1	Parámetros y variables que definen una cadena cinemática.	93

Índice de tablas

Tabla 2.1	Especificaciones y requerimientos para el diseño del rotor eólico. .	23
Tabla 2.2	Valores de la discretización del álabe.	23
Tabla 2.3	Geometría del álabe.	26
Tabla 4.1	Tabla de parámetros y variables.	49
Tabla 6.1	Momento inducido en el álabe a diferentes casos de estudio. . . .	75
Tabla 6.2	Deflexión del álabe para diferentes casos de estudio.	77
Tabla B.1	Propiedades seccionales y geometría del álabe.	91

Introducción

La energía eólica es fuente de energía proveniente del viento, ésta se regenera de manera natural y no produce gases de efecto invernadero ni emisiones contaminantes, por tanto, se considera que es fuente de energía limpia e inagotable, tales características hacen que la energía eólica sea considerada una de las fuentes de energía del futuro. México incursionó en la industria eólica en el año 1994 y para el año 2018 contaba con 4, 199 *MW* de capacidad instalada y un total de 45 centrales eólicas distribuidas en 13 estados de la República Mexicana. Se estima que México cuenta con un potencial eólico aprovechable a corto plazo de 15 *MW*. Por otro lado, en 2017 la industria eólica experimento un incremento de 10 % de capacidad instalada en el mundo respecto al año anterior, por lo que se espera que este tipo de tecnología siga teniendo un crecimiento a nivel nacional y global.

Uno de los componentes principales de la tecnología eólica es el aerogenerador, este es un dispositivo que transforma la energía cinética del viento en electricidad. Los aerogeneradores se clasifican de acuerdo a la posición del eje del rotor respecto a la dirección del viento en, aerogeneradores de eje vertical y de eje horizontal, estos últimos experimentan su máxima captación de energía cuando el rotor es perpendicular a la dirección predominante de viento y debido a que el viento cambia constantemente de dirección cuentan con un sistema de orientación que le permite orientar la góndola durante los cambios de dirección del viento. Por otro lado, debido la naturaleza fluctuante y rafagosidad del viento es difícil controlar la potencia de salida, por lo que puede presentarse el caso que la potencia de salida sea superior a la potencia del generador eléctrico, este problema se soluciona implementando un sistema de control activo que permite controlar el ángulo de paso de los álabes.

Durante el funcionamiento de un aerogenerador de eje horizontal, en su constante movimiento de reorientación, se induce un fenómeno conocido como efecto giroscópico, este fenómeno se induce en todo cuerpo que presente movimiento giratorio en al menos dos de sus ejes principales, en el caso de los aerogeneradores, este fenómeno es causado por los movimientos giratorios simultáneos correspondientes al giro del rotor y orientación de la góndola. Los trabajos realizados hasta el momento sobre este fenómeno en aerogeneradores de baja potencia se han enfocado en los de control pasivo y no existen suficientes investigaciones para los de control activo [1], por tanto este área es un nicho de investigación.

1.1 Estado del arte

De los trabajos existentes que se relacionan con el tema de investigación, se puede mencionar los siguientes. **Younsi et al. [2]**, en 2001 presentan un modelo basado en la teoría de vigas tridimensionales, consideran que el álabe tiene secciones variables del perfil aerodinámico tipo NACA 4415, consideran efectos de membrana, efecto cortante transversal, flexión y torsión libre, después aplican cargas aerodinámicas (fuerza axial, tangencial y momento aerodinámico) y determinan el desempeño estático y dinámico del álabe, realizan una validación de resultados comparando éstos con resultados experimentales y resultados numéricos obtenidos mediante un código CFD.

Hamdi et al. [3], en 2007 emplean el método de elemento finito para determinar la influencia del efecto giroscópico en el desempeño dinámico de un álabe de $5m$ de longitud de un aerogenerador de eje horizontal. Primeramente emplean el método del momentum del elemento del álabe para determinar la fuerzas aerodinámicas aplicadas en el álabe dependiendo de la velocidad del viento. Después determinan una formulación matricial de las ecuaciones de movimiento del álabe tomando en cuenta una formulación no lineal, determinan la matriz de rigidez, la rigidez geométrica, matriz de masa y matriz de acoplamiento giroscópico y simulan la respuesta dinámica del álabe bajo la acción de su propio peso y cargas aerodinámicas.

Hamdi et al. [4], en 2014 presentan un estudio de la dinámica del álabe de un aerogenerador de eje horizontal que esta sujeto a cargas aerodinámicas, centrífugas, gravitatorias y giroscópicas. Consideran un álabe de $5m$ de longitud el cual tiene una sección transversal variable y está compuesto con un material homogéneo e isotrópico. El álabe es dividido en 12 elementos de sección transversal constante y posteriormente usando el método de elementos finitos son ensamblados y constituyen un modelo aproximado del álabe. Determina la matriz de rigidez, de masa y matriz de acoplamiento giroscópico posteriormente resuelven el sistema de ecuaciones lineales de movimiento del álabe y calcula la respuesta estática y dinámica.

Hamdi et al. [5], presentan un modelo de elementos finitos del álabe de aerogenerador para una gran deformación elástica sometida a las cargas aerodinámicas, centrífugas, giroscópicas y de gravedad. Las cargas giroscópicas aplicadas al álabe son inducidas por su vibración y rotación simultáneas. El modelo de viga de elementos finitos propuesto se basa en un método de interpolación simplex y está destinado principalmente al análisis numérico de la vibración de las palas de viento en grandes deformaciones elásticas. Para ello, la teoría de las vigas cortas y el método de elementos finitos se combinan para desarrollar el sistema de ecuaciones algebraicas que gobierna el movimiento tridimensional de la vibración del álabe. La deformación estática del álabe determinada se evalúa mediante un software adecuado utilizando un modelo sólido de elementos finitos para mostrar la efectividad de los resultados obtenidos. Para simular la respuesta dinámica no lineal del álabe, se aplica el esquema predictivo-corrector de Newmark y se aprueba la estabilidad del proceso numérico durante un gran tiempo de funcionamiento de la pala. Finalmente, se analiza la influencia de la rigidez geométrica modificada sobre las amplitudes y fre-

cuencias de la vibración del álabe inducida por la excitación sinusoidal de la gravedad.

Realizando un análisis de los artículos anteriores se puede comentar lo siguiente, del artículo publicado por Younsi et al. [2], los autores determinan la respuesta estática y dinámica de un álabe de aerogenerador considerando efectos de membrana, efecto cortante transversal, flexión y torsión, considerando cargas aerodinámicas y centrífugas, sin embargo, no se consideran cargas gravitatorias ni cargas giroscópicas.

Del artículo publicado por Hamdi et al. [3], los autores modelan la respuesta estática y dinámica del álabe de un aerogenerador, modelan el álabe mediante una formulación de elemento finitos considerando una deformación lineal para la deformación axial, transversal y torsional mediante una formulación isoparamétrica simple, sin embargo no presenta una validación de sus resultados.

Del artículo publicado por Hamdi et al. [4] los autores realizan un modelado de la respuesta estática y dinámica de un álabe de 5 metros de longitud, considerando cargas aerodinámicas, giroscópicas y del propio peso del álabe, realizan una formulación del álabe vía una formulación isoparamétrica simple. Hallan la matriz de rigidez, matriz giroscópica y matriz de masa, y posteriormente hallan la respuesta estática y dinámica del sistema, sin embargo, los autores no presentan una validación de sus resultados.

Del artículo publicado por Hamdi et al. [5], los autores presentan el modelado de un álabe de aerogenerador mediante elementos finitos de viga considerando grandes deformaciones, el álabe se somete a cargas aerodinámicas, centrífugas, giroscópicas y gravitatorias, se considera deformación axial, transversal y torsional, se halla la respuesta estática y dinámica del álabe, sin embargo los autores especifican que las cargas giroscópicas consideradas son debidas a la vibración del álabe y a la rotación simultánea del mismo, por lo que no se consideran las cargas giroscópicas inducidas por la rotación del rotor y giro de la góndola simultáneamente.

1.2 Planteamiento del problema

Durante el funcionamiento de un aerogenerador ocurre un fenómeno conocido efecto giroscópico. Este fenómeno induce una fuerza alterna aplicada en el álabe que genera una torsión de baja amplitud constante en el aleteo fuera del plano del rotor que irrumpe en el flujo de aire alrededor del perfil produciendo ruido [4], dichos movimientos cíclicos dependen del lapso de tiempo de orientación de la góndola y pueden llegar a exceder los parámetros de diseño, dicho fenómeno no debe despreciarse y los efectos deben ser considerados durante el diseño del álabe ya que estas cargas pueden ocasionar daños permanentes en el álabe. Las variables que más influyen en la magnitud del efecto giroscópico son la velocidad angular de orientación de la góndola $\dot{\theta}_1$ y giro del rotor $\dot{\theta}_2$. El presente estudio permitirá conocer como influyen estas variables en la deflexión de los álabes y permitirá responder la siguiente pregunta. Dado, las características mecánicas, geométricas y operacionales del rotor eólico, ¿cuáles son las velocidades angulares del rotor $\dot{\theta}_1$ y orientación de la góndola $\dot{\theta}_2$ más óptimos, que permita mantener la deflexión de los álabes en un rango permisible de operación y que la captación de la energía sea máxima, para un aerogenerador de eje horizontal de baja potencia?.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Dadas las características mecánicas, geométricas y operacionales del rotor eólico, determinar los perfiles óptimos de velocidad angular del rotor $\dot{\theta}_2$ y de orientación de la góndola $\dot{\theta}_1$, mediante una modelación matemática que permita maximizar la captación de energía eólica y que la deflexión de los álabes se mantengan en un rango permisible de operación para un aerogenerador de baja potencia de control activo.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Dadas las características de viento de la región del Istmo de Tehuantepec y las especificaciones de diseño del rotor eólico, diseñar un álabes para un aerogenerador de 10 kW de potencia de eje horizontal.
2. Realizar a través de modelos matemáticos la determinación de las deflexiones de los álabes del aerogenerador debido a cargas aerodinámicas.
3. Determinar los modelos cinemáticos correspondientes al movimiento giroscópico del álabes debido al movimiento de orientación de la góndola $\dot{\theta}_1$ y giro del rotor $\dot{\theta}_2$.
4. Determinar los perfiles óptimos de orientación de la góndola $\dot{\theta}_1$ y giro del rotor $\dot{\theta}_2$ que permita maximizar la captación de energía eólica.
5. Determinar los modelos dinámicos correspondientes al movimiento giroscópico del álabes.
6. Realizar la determinación de las deflexiones de los álabes del aerogenerador debido a cargas inerciales y aerodinámicas.

1.4 Justificación

El siguiente trabajo de investigación servirá para determinar los perfiles óptimos de orientación de la góndola durante los cambios de dirección del viento, sin que se induzcan fuerzas inerciales excesivas que dañen al aerogenerador, por otra parte, será útil para posteriores investigaciones en el control del mecanismo de orientación de la góndola.

1.5 Hipótesis

Si se determina un modelo matemático adecuado, que permita introducir como variables las velocidades angulares de orientación de la góndola $\dot{\theta}_1$ y giro del rotor $\dot{\theta}_2$ de un aerogenerador de eje horizontal de baja potencia de control activo, es posible determinar el rango de valores para $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$ más óptimos que permitan lograr la máxima captación de energía eólica y que las deformaciones en los álabes se mantengan en rango permisible.

Diseño del álabe

2.1 Introducción

Un aerogenerador es un dispositivo que extrae la energía cinética del viento y la convierte en energía mecánica, por tanto, la producción de potencia depende de la interacción del rotor y el viento. A través del estudio se ha demostrado que los aspectos que más influyen en el desempeño de un aerogenerador (potencia y cargas promedio) son causadas por la fuerza aerodinámica generada por el viento promedio [7], mientras que las cargas de fatiga y las cargas pico experimentadas por el aerogenerador son causadas por fuerzas aerodinámicas periódicas debidas a viento cortante, cargas excéntricas, rotación del rotor, fuerzas fluctuantes aleatorias inducidas por turbulencia, y efectos dinámicos. Una forma de disminuir las cargas de fatiga es operando en condiciones de aerodinámica en estado estable, el cual se considera cuando el plano del rotor es perpendicular al flujo de viento. Por tal simplicidad se aborda este capítulo considerando aerodinámica en estado estable.

En este capítulo se realiza el diseño de un álabe de 10 kW de potencia, la validación del diseño aerodinámico y la determinación de cargas aerodinámicas (fuerza axial, fuerza tangencial y momento aerodinámico). Primeramente se presenta la teoría aerodinámica empleada para el diseño, después se presenta una metodología explícita para el diseño de álabes de aerogeneradores de eje horizontal y se realiza el diseño del álabe aplicando dicha metodología, enseguida se valida el diseño evaluando la geometría del álabe en un software comercial y finalmente se determinan las cargas aerodinámicas.

2.2 Teoría aerodinámica de rotores

2.2.1 Teoría del disco áctuator

En esta sección se presenta la teoría de disco actuador, el cual es empleado para determinar la producción de potencia del aerogenerador empleando perfiles aerodinámicos, calcular la forma del álabe óptimo (iniciar el diseño de un álabe) y analizar el desempeño aerodinámico del rotor (una vez conocidas la forma del álabe y las características de los perfiles aerodinámicos).

La teoría del disco actuador considera al modelo completo simple de un flujo alrededor de álabes de un aerogenerador, este fue desarrollado primeramente por Rankine y Froude para describir el flujo alrededor de hélices de barcos [8], sin embargo, la introducción a turbinas eólicas se le atribuye a Betz (1926) [7] y puede ser usada para determinar la potencia del rotor de un aerogenerador, el empuje del viento sobre el rotor ideal y el efecto de la operación del rotor en el campo de viento local. El modelo de disco actuador es el modelo mas simple del rotor de un aerogenerador donde el rotor es remplazado por un disco circular a través del cual fluye una corriente de aire con velocidad U_D y a través del cual se crea una discontinuidad de presión como se observa en la figura 2.1. El modelo de disco actuador está basado en los siguientes supuestos

- Flujo del fluido en estado estable, incompresible y homogéneo
- No hay arrastre por fricción
- Infinito número de álabes
- Empuje uniforme en el área del rotor
- No hay rotación de estela
- Presión estática aguas arriba y aguas abajo del rotor e iguales a la presión del ambiente.

Aplicando el principio de conservación de masa se determina que el flujo másico \dot{m} es el mismo en la entrada y salida del tubo de corriente como se muestra en la figura 2.1, así, la ecuación de continuidad es

$$\dot{m} = \rho A_1 U_1 = \rho A_2 U_2 = \rho A_D U_D = \rho A_3 U_3 = \rho A_4 U_4 \quad (2.1)$$

donde A_n y U_n para $n = 1, 2, D, 3, 4$ es el área de la sección transversal y la velocidad del viento a diferentes secciones del tubo de corriente y ρ es la densidad del aire.

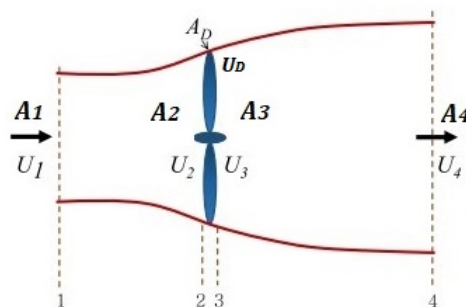


Figura 2.1: Disco actuador y tubo de corriente.

Aplicando la ecuación de la cantidad de movimiento lineal para flujo unidimensional constante en ambos lados del tubo de corriente se obtiene

$$F_n = \dot{m}(U_1 - U_4) \quad (2.2)$$

donde F_n es la fuerza de empuje en la dirección del sentido de la corriente.

Considerando que el flujo es sin fricción y que no hay trabajo en la transferencia de energía, se puede aplicar la conservación de energía mediante la ecuación de Bernoulli. Aplicando la ecuación de Bernoulli en ambos lados del tubo de corriente tenemos

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2 \quad (2.3)$$

$$P_3 + \frac{1}{2}\rho U_2^2 = P_4 + \frac{1}{2}\rho U_4^2 \quad (2.4)$$

Combinando (2.3) y (2.4), y considerando que $P_1 = P_4$ y $U_2 = U_3 = U_D$ se obtiene la caída de presión

$$\Delta P = P_2 - P_3 = \frac{1}{2}\rho(U_1^2 - U_4^2) \quad (2.5)$$

También el empuje del rotor puede ser expresado como la suma de fuerzas en cada lado

$$F_n = A\Delta P \quad (2.6)$$

Sustituyendo 2.5 en 2.6 obtenemos el empuje en términos de la velocidad del viento de entrada y salida del tubo de corriente.

$$F_n = \frac{1}{2}\rho A_D(U_1^2 - U_4^2) \quad (2.7)$$

Sustituyendo (2.1) en (2.2) e igualando con (2.7), se obtiene

$$U_D = \frac{U_1 + U_4}{2} \quad (2.8)$$

Cuando el flujo de viento atraviesa el disco actuador, experimenta un disminución de velocidad y esta teoría modela este decremento mediante aU_1 , donde a es conocida como factor de inducción axial y se puede determinar con la siguiente ecuación.

$$U_D = U_1 - aU_1$$

$$a = \frac{U_1 - U_D}{U_1}$$

por tanto U_D y U_4 se puede escribir como:

$$U_D = U_1(1 - a) \quad (2.9)$$

$$U_4 = U_1(1 - 2a) \quad (2.10)$$

La potencia en el rotor P_o , es igual al empuje por la velocidad en el disco U_D

$$P_o = \frac{1}{2}\rho A_D(U_1^2 - U_4^2)U_D = \frac{1}{2}A_D U_D(U_1 + U_4)(U_1 - U_4) \quad (2.11)$$

Sustituyendo (2.10) en (2.7) y (2.9), (2.10) en (2.11) obtenemos (2.12) y (2.13) respectivamente en términos del coeficiente de inducción axial, donde, U_1 y A_D son reemplazados por U y A .

$$F_n = 2\rho A U^2 a(1 - a) \quad (2.12)$$

$$P_o = 2\rho A U^3 a(1 - a)^2 \quad (2.13)$$

El desempeño de una turbina es usualmente caracterizada por su coeficiente de potencia, C_p

$$C_p = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho U^3 A} \quad (2.14)$$

El coeficiente de potencia es la fracción de potencia del viento que puede ser extraída por el rotor, sustituyendo (2.13) en (2.14), tenemos

$$C_p = 4a(1 - a)^2 \quad (2.15)$$

Derivando a (2.15) con respecto a a e igualando a cero, tenemos que $a = 1/3$, después

$$C_{p,max} = 16/27 = 0.5926 \quad (2.16)$$

El límite de Betz (2.16) es teóricamente el máximo coeficiente de potencia que se puede extraer del viento.

Al aplicar la teoría de la cantidad de movimiento lineal en el rotor eólico, se supuso que no existía ninguna rotación en el flujo. En realidad el fluido que atraviesa el disco actuador experimenta una rotación constante, esta rotación es causada por el rotor e implica la existencia de una velocidad tangencial.

En el caso del rotor giratorio de un aerogenerador, el flujo detrás del rotor gira en dirección opuesta al rotor, en reacción al torque ejercido por el flujo sobre el rotor. Se supone que esta transferencia en el movimiento del aire ocurre de manera inmediata a lo largo del espesor del disco. Se considera que el disco esta formado por múltiples anillos de radio r y espesor dr . Bajo la premisa de que no hay interacción entre los diferentes anillos y por tanto cada uno sólo aporta momentum angular al fluido que atraviesa dicho anillo. El par que el fluido genera en cada anillo será igual a la variación de momentum angular que experimenta el fluido que atraviesa dicho anillo.

Como se muestra en la figura 2.2, el álabe se discretiza en varias secciones y cada sección barre un área anular cuando gira el rotor. Los supuestos son que estos anillos están separados y no hay interacción entre ellos. En otras palabras, el tubo de corriente se descompone a lo largo de diferentes posiciones de radio (r) y cada anillo tiene su propio momento de equilibrio [9].

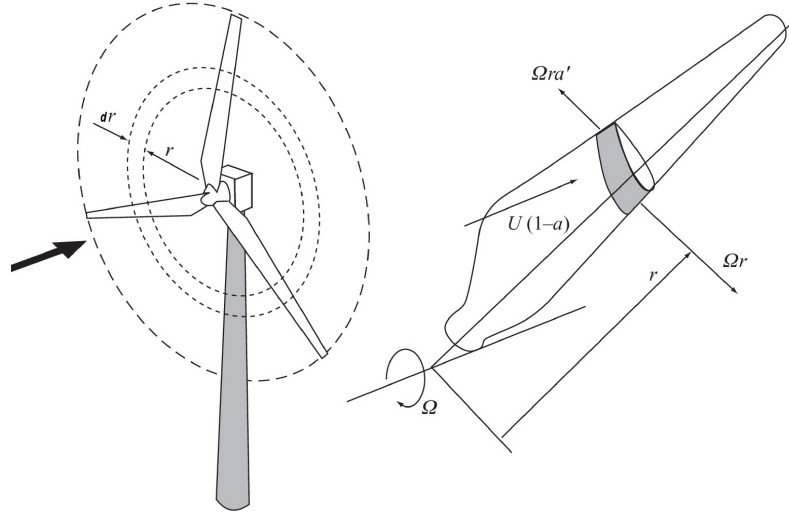


Figura 2.2: Barrido del anillo anular en el tubo de corriente.

Definiendo al momento de inercia de un anillo como:

$$I = mr^2$$

El momentum angular se define como

$$H = I\omega$$

Y el torque: $Q = \frac{dH}{dt}$

$$Q = \frac{d(I\omega)}{dt} = \frac{d(mr^2\omega)}{dt} = \frac{dm}{dt}r^2\omega$$

Para un elemento diferencial el torque es:

$$dQ = d\dot{m}\omega r^2$$

Para un elemento circular rotatorio:

$$d\dot{m} = \rho AU_2 = \rho 2\pi r dr U_2$$

El cambio de momentum angular del aire pasando a través del anillo debe ser igual al torque actuando en ese anillo (ver figura 2.2).

$$dQ = \rho U_2 \omega r^2 2\pi r dr \quad (2.17)$$

La velocidad tangencial inducida en la estela del rotor se especifica mediante el factor de inducción tangencial a' como $\omega r = 2a'\Omega r$.

$$a' = \frac{\omega}{2\Omega} \quad (2.18)$$

sustituyendo a (2.9) y (2.18) en (2.17) resulta en:

$$dQ = 4a'(1-a)\rho U_1 \Omega r^3 \pi dr \quad (2.19)$$

El torque de accionamiento en el eje del rotor es dQ y por lo tanto el incremento de la potencia del eje del rotor es:

$$dP = \Omega dQ. \quad (2.20)$$

Sustituyendo (2.19) en (2.20) se obtiene la potencia

$$dP = 4\rho\pi U_1(1-a)a'\Omega^2 r^3 dr \quad (2.21)$$

2.2.2 Teoría del elemento del álabe

En esta teoría las fuerzas en el álabe de un aerogenerador son expresadas mediante el coeficiente de sustentación, coeficiente de arrastre y coeficiente de momento en función del ángulo de ataque, los cuales pueden ser determinadas mediante pruebas experimentales en túneles de viento [9]. Para el análisis del álabe, éste se discretiza en N secciones y se realizan las siguientes consideraciones:

- No existe interacción aerodinámica entre las secciones.
- Las fuerzas actuantes sobre el álabe se determinan por las características de sustentación y arrastre, las cuales dependen de la forma del perfil.

La velocidad relativa del viento es la resultante de la velocidad del viento en el rotor $U(1+a)$ y la velocidad del viento debido a la rotación del álabe. Donde la velocidad del viento debido a la rotación del álabe es la suma de la velocidad angular del álabe (Ωr) más la velocidad angular inducida $\frac{\omega r}{2}$, matemáticamente tenemos

$$\Omega r + \frac{\omega r}{2} = \Omega r + \Omega a' r = \Omega r (1 + a')$$

El ángulo del viento relativo es la suma del ángulo β y el ángulo de ataque α . En general las relaciones entre la fuerzas actuantes en el perfil, ángulos y velocidades se obtiene a partir del triángulo de velocidades que se observa en la figura 2.3 [9].

$$W = \sqrt{U_1^2(1-a)^2 + r^2\Omega^2(1+a')^2}$$

A partir de la figura 2.3a se puede determinar las siguientes relaciones:

$$\text{sen } \phi = \frac{U_1(1-a)}{W}$$

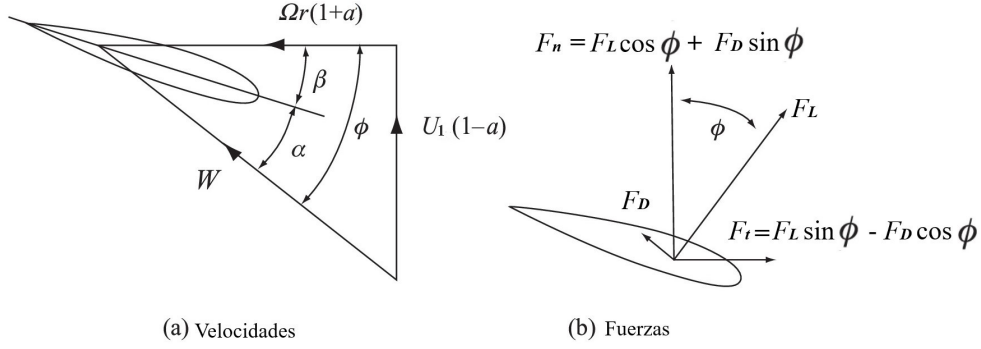


Figura 2.3: Velocidades y fuerzas del elemento del álabe.

$$\cos \phi = \frac{\Omega r(1+a')}{W}$$

$$\tan \phi = \frac{U_1(1-a)}{\Omega r(1+a')} = \frac{1-a}{(1+a')\lambda_r} \quad (2.22)$$

De la ecuación (2.22) se puede despejar el ángulo de flujo.

$$\phi = \arctan \left[\frac{1-a}{\lambda_r(1+a')} \right] \quad (2.23)$$

Las fuerzas en el elemento del álabe se muestran en la figura 2.3b y por definición la fuerza de sustentación y arrastre son perpendicular (2.24) y paralela (2.25) al flujo incidente respectivamente y están dadas por las siguientes ecuaciones respectivamente.

$$dF_L = C_l \frac{1}{2} \rho (V_{rel})^2 c dr \quad (2.24)$$

$$dF_D = C_d \frac{1}{2} \rho (V_{rel})^2 c dr \quad (2.25)$$

Estas tienen componentes que son paralelo (2.26) y perpendicular (2.27) al plano del rotor [10] y se determinan con

$$dF_n = dF_L \cos \phi + dF_D \sin \phi \quad (2.26)$$

$$dF_t = dF_L \sin \phi - dF_D \cos \phi \quad (2.27)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.24) y (2.25) en (2.26) se obtiene la fuerza normal, donde B es el número de álabes y C es la cuerda.

$$dF_n = \frac{1}{2} B C \rho (V_{rel})^2 (C_l \cos \phi + C_d \sin \phi) dr \quad (2.28)$$

El diferencial torque debido a la fuerza tangencial que opera a una distancia, r , del centro viene dado por:

$$dQ = BrdF_t \quad (2.29)$$

entonces, sustituyendo (2.24), (2.25) y (2.27) en (2.29), tenemos

$$dQ = \frac{1}{2} B C \rho (V_{rel})^2 (C_l \sen\phi - C_d \cos\phi) r dr \quad (2.30)$$

2.2.3 Teoría del momentum del elemento del álabe

Esta teoría relaciona las fuerzas axial y fuerza tangencial halladas tanto en la teoría del disco actuador y en la teoría del elemento del álabe, igualando ambas ecuaciones se puede derivar las condiciones de flujo para el diseño de una turbina.

Igualando (2.19) y (2.30) se obtiene:

$$dQ = 2\pi r^2 \rho U_1 (1-a) a' \Omega r^3 = \frac{1}{2} r B C \rho (V_{rel})^2 C_t \quad (2.31)$$

De la misma manera igualando (2.12) y (2.28) se obtiene:

$$dF_n = 2\pi r^2 \rho U_1^2 a (1-a) = \frac{1}{2} B C \rho V_{rel}^2 C_n \quad (2.32)$$

Definiendo al parámetro solidez σ como la fracción del área anular en el volumen de control el cual es cubierto por los álaves:

$$\sigma = \frac{BC}{2\pi r} \quad (2.33)$$

Después, definiendo a relación de velocidad de la punta del álabe (λ) como la relación de la velocidad de la punta del álabe entre la velocidad libre del viento:

$$\lambda = \frac{\Omega r}{U_1} \quad (2.34)$$

Esta relación λ a menudo ocurre en las ecuaciones aerodinámicas del rotor. La relación de velocidad local se define como:

$$\lambda_r = \lambda \frac{r}{R} \quad (2.35)$$

Por tanto, a partir de las combinaciones de estas teorías, se puede simplificar el cálculo de las fuerzas ejercidas en el rotor. El factor de inducción axial (a) se obtiene relacionando (2.32), (2.2.2) y (2.33), se obtiene (2.36)

$$\frac{a}{1-a} = \frac{\sigma C_n}{4 \sen^2 \phi} \quad (2.36)$$

$$a = \frac{1}{\frac{4 \sen^2 \phi}{\sigma C_n} + 1} \quad (2.37)$$

El factor de inducción tangencial (a') se obtiene igualando (2.31) y sustituyendo (2.2.2) y (2.33), además teniendo en cuenta (2.2.2)

$$\frac{a'}{1+a'} = \frac{\sigma C_t}{4 \operatorname{sen} \phi \cos \phi} \quad (2.38)$$

$$a' = \frac{1}{\frac{4 \operatorname{sen} \phi \cos \phi}{\sigma C_t} - 1} \quad (2.39)$$

Para obtener mejores resultados es necesario implementar dos correcciones, las cuales son, la corrección de Prandtl que corrige la suposición inicial de número infinito de álabes. Prandtl deriva un factor de corrección F para las cargas aerodinámicas de las ecuaciones resultantes de la teoría de la cantidad de movimiento del álabe, de igual forma se aplican las correcciones a (2.37) y (2.39).

$$dQ = 4F\pi r \rho U_1(1-a)a'\Omega r^3 dr \quad (2.40)$$

$$dF_n = 4F\pi r \rho U_1^2 a(1-a)dr \quad (2.41)$$

donde:

$$F = \frac{2}{\pi} \cos^{-1}(e^{-f})$$

$$f = \frac{B}{2} \frac{R-r}{r \operatorname{sen}(\phi)}$$

Cuando el valor del factor de inducción axial a llega a ser mas grande que 0.2 [10] la teoría de la cantidad de movimiento del elemento del álabe arroja resultados no lógicos, por lo que se realiza una corrección conocida como corrección de Glauert.

si $a \leq a_c$, entonces;

$$a = \frac{1}{\frac{4 \operatorname{sen}^2 \phi}{\sigma C_n} + 1}$$

si $a > a_c$, entonces;

$$k = \frac{4F \operatorname{sen}^2(\phi_r)}{\sigma C_n}$$

$$a = \frac{1}{2} [2 + k(1 - 2a_c) + \sqrt{[k(1 - 2a_c) + 2]^2 + 4(ka_c^2 - 1)}]$$

donde $a_c = 0.2$.

Forma del álabo considerando un rotor óptimo y rotación de estela

La geometría del álabo queda definida determinando la distribución de cuerda, torsión, tipo de perfil y distribución de espesor relativo a lo largo del álabo. En esta sección se desarrollan los modelos para determinar la cuerda y torsión del álabo.

La contribución de potencia de cada anillo es

$$dP = \Omega dQ$$

La potencia total del rotor es

$$P = \int_{rh}^R dP = \int_{rh}^R \Omega dQ$$

Donde rh es el radio del buje. El coeficiente de potencia, C_p , es

$$C_p = \frac{P}{P_{wind}} = \frac{\int_{rh}^R \Omega dQ}{0.5\rho\pi R^2 U^3}$$

Empleando la ecuación de torque diferencial y la definición velocidad específica local, la ecuación anterior es

$$C_p = \frac{2}{\lambda^2} \int_{\lambda_h}^{\lambda} \sigma' Cl (1-a)^2 (1/\sin\phi) [1 - (C_d/Cl) \cot\phi] \lambda_r^2 d\lambda_r$$

Donde λ_h es la velocidad específica en el buje.

La ecuación anterior puede ser expresada como [7]

$$C_p = \left(\frac{8}{\lambda^2}\right) \int_{\lambda_h}^{\lambda} F \sin^2\phi (\cos\phi - \lambda_r \sin\phi) (\sin\phi + \lambda_r \cos\phi) [1 - (C_d/C_l) \cot\phi] \lambda_r^2 d\lambda_r$$

Posteriormente, considerando un rotor eólico ideal u óptimo, se asume que no hay arrastre ($C_d = 0$) y no hay pérdidas en la punta del álabo ($F = 1$), por tanto la ecuación de coeficiente de potencia se simplifica.

$$C_p = \left(\frac{8}{\lambda^2}\right) \int_{\lambda_h}^{\lambda} \sin^2\phi (\cos\phi - \lambda_r \sin\phi) (\sin\phi + \lambda_r \cos\phi) \lambda_r^2 d\lambda_r$$

Derivando la expresión anterior e igualando a cero nos queda

$$\frac{\partial}{\partial\phi} [\sin^2\phi (\cos\phi - \lambda_r \sin\phi) (\sin\phi + \lambda_r \cos\phi)] = 0$$

$$\lambda_r = \frac{\sin\phi(2\cos\phi - 1)}{(1 - \cos\phi)(2\cos\phi + 1)} = \cot \left[\frac{3\phi}{2} \right]$$

y finalmente podemos hallar el ángulo de flujo.

$$\phi = (2/3) \arctan(1/\lambda_r) \quad (2.42)$$

De la figura 2.3 podemos observar que

$$\beta = \phi - \alpha \quad (2.43)$$

Donde ϕ es el ángulo de flujo y α es el ángulo de ataque, por lo que una vez conocido el ángulo de flujo y el ángulo de ataque, se puede conocer la torsión del álabe.

La expresión 2.44 sirve para determinar la cuerda, la cual es derivada en [11] y puede ser encontrada en [7].

$$C = \frac{8\pi r}{BC_l} (1 - \cos\phi) \quad (2.44)$$

$$a = \frac{1}{1 + \frac{4\sin^2\phi}{\sigma C_l \cos\phi}} \quad (2.45)$$

$$a' = \frac{1 - 3a}{4a - 1} \quad (2.46)$$

Una vez conocidas las formulas para torsión, cuerda, coeficiente de inducción axial y coeficiente de inducción tangencial en términos del ángulo de flujo, se puede emplear un método iterativo para determinar la geometría del álabe.

2.3 Metodología de diseño de álabes

2.3.1 Definir los requerimientos y especificaciones de diseño

El diseño aerodinámico del álabe de un rotor eólico busca adaptarse al diseño completo del aerogenerador y a su ambiente, para así obtener el mejor rendimiento, por lo que se deben considerar las características del aerogenerador completo tales como: potencia requerida (P_r), un coeficiente de potencia estimada C_p , las eficiencias de cada uno de los componentes principales que intervienen en la conversión de energía mecánica (η_m) a eléctrica (η_{el}), la velocidad angular nominal del generador eléctrico (Ω), el tipo de transmisión de potencia y tipo de control de potencia, las cuales están relacionadas mediante (2.47),

$$P_r = \frac{1}{2} \rho U_d^3 A_T C_p \eta_m \eta_{el} \quad (2.47)$$

Donde,

$$\eta_{me} = \eta_{cm}\eta_{eb} \quad (2.48)$$

$$\eta_{el} = \eta_g\eta_c\eta_{cv} \quad (2.49)$$

donde η_{cm} es la eficiencia de la caja multiplicadora de velocidad, η_{eb} es la eficiencia del eje de baja velocidad, η_g es la eficiencia del generador, η_c es la eficiencia de los conductores eléctricos, η_{cv} es la eficiencia del convertidor de potencia.

Para considerar las condiciones del ambiente se requiere la velocidad promedio del sitio y la densidad del aire, motivo por el cual, se debe realizar un estudio del recurso eólico de la zona de instalación.

2.3.2 Selección de perfiles aerodinámicos

La selección de perfiles aerodinámicos es muy importante ya que la producción de energía de un aerogenerador depende en gran medida de la geometría del álabe, a su vez la geometría depende también del tipo de perfil aerodinámico utilizado.

El álabe se puede dividir en zonas (ver figura 2.4) de acuerdo a su desempeño aerodinámico y los perfiles aerodinámicos se seleccionan de acuerdo a la característica de cada zona. En la figura 2.5 [13] se puede observar el comportamiento típico del coeficiente de potencia en función del radio del álabe, se puede apreciar que en el último 10 % de la longitud del álabe no hay aporte significativo de potencia, sin embargo, esta zona se caracteriza por que en ella se produce la mayor parte del ruido que genera el álabe durante su funcionamiento [9]. En la figura 2.5 se puede observar que del 30 % al 90 % del álabe la potencia tiene un comportamiento lineal ascendente, esta se conoce como zona aerodinámica y se caracteriza por que en ella se genera hasta el 80 % de sustentación (ver figura 2.5) que produce el álabe durante su funcionamiento [15]; después tenemos la zona que se extiende desde la raíz hasta 30 % de la longitud del álabe, en esta zona se concentra hasta 1/2 de la masa total del álabe [13] y se caracteriza por soportar las cargas generadas por cada sección posterior a ella, esta zona es característica por su demanda estructural.

Observando lo anterior el álabe se puede dividir en tres zonas [13].

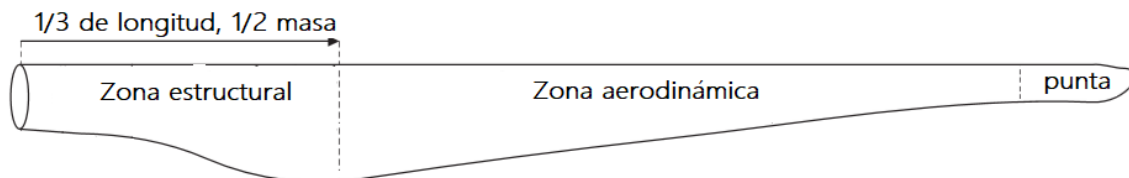


Figura 2.4: Zonas típicas del álabe.

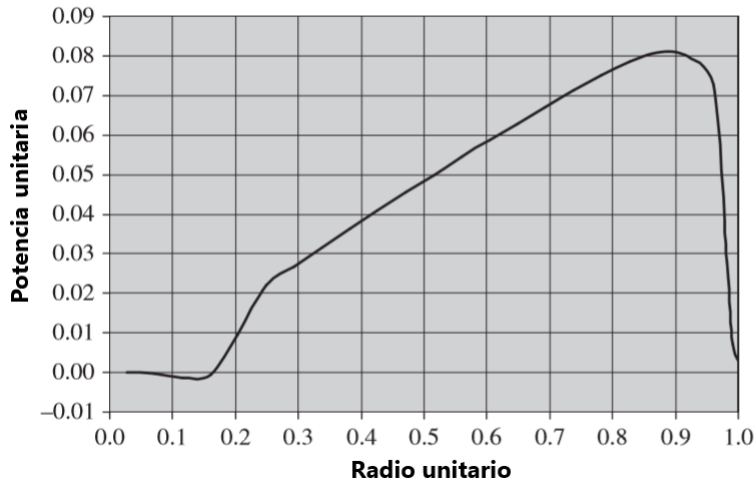


Figura 2.5: Comportamiento de la potencia unitaria a lo largo del álabe.

2.3.3 Especificaciones de los perfiles aerodinámicos a lo largo del álabe

Para garantizar un buen desempeño de acuerdo a la función de cada zona del álabe, los perfiles aerodinámicos se seleccionan de acuerdo a un criterio conocido como espesor relativo. Debido a consideraciones de resistencia, rigidez y desempeño aerodinámico el espesor relativo de la superficie aerodinámica aumentará desde la punta hasta el primer perfil. Tradicionalmente, los álabes de las turbinas eólicas tienen un espesor relativo de aproximadamente el 18% en la punta y llega al 25% de espesor a media longitud del álabe [14]. El espesor relativo en la zona estructural es una variación del 40% hasta 100% de la cuerda [13]. En la figura 2.6 se observa la distribución de espesor relativo típico utilizado actualmente, recomendado por [13].

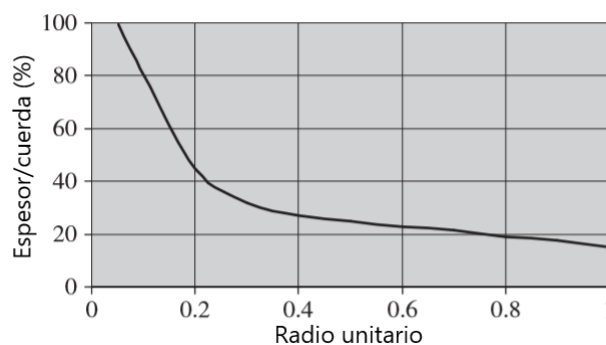


Figura 2.6: Distribución de espesor relativo en el álabe.

2.3.4 Selección de perfiles aerodinámicos

Una vez conocido los requerimientos de los perfiles a lo largo del álabe, se procede a seleccionar el perfil más óptimo para cada zona del álabe, para ello existen criterios que no ayudan en la sección de perfiles más óptimo, los más empleados son: alta relación

C_l/C_d , comportamiento de la variación de C_l al llegar a su máximo valor, dificultad de manufactura, baja sensibilidad a la rugosidad, baja emisión de ruido.

Máxima eficiencia: Para evaluar tal criterio se se determina la relación C_l/C_d de los perfiles aerodinámicos, dicha relación esta relacionado directamente con la eficiencia del perfil ya que valores mas altos de C_l/C_d implica mayor coeficiente de sustentación y menor coeficiente de arrastre.

Comportamiento de la variación de C_l al llegar a su máximo valor: Cuando la velocidad de viento es demasiado alta se crea una turbulencia en la parte trasera del álabe el cual produce una perdida de sustentación y un desprendimiento de la capa límite, es importante asegurar que dicha pérdida de sustentación no ocurra de manera brusca ya que la caída abrupta de la sustentación puede producir fuertes vibraciones, por otra lado, no es conveniente que ocurra gradualmente si existen ráfagas de viento en lugar de emplazamiento ya que puede llegar a embalar el rotor y dañar el generador eléctrico, la selección del perfil de acuerdo a este criterio depende del las características de viento del sitio de instalación.

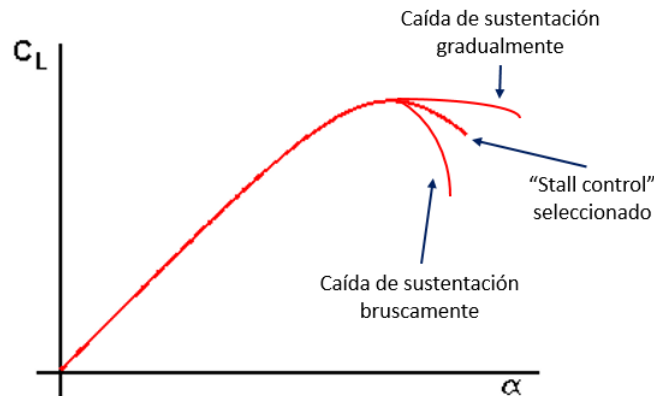


Figura 2.7: Comportamiento de C_l después de alcanzar su máximo valor.

Nivel de dificultad en la manufactura: Para evaluar este criterio se toma en cuenta la experiencia que se tiene en el proceso de laminado de fibra de vidrio con resina poliéster a partir de un molde maquinado. La característica que más complica la manufactura del perfil es un borde de salida muy delgado.

Para seleccionar el perfil mas óptimo se emplea el método conocido como método de los pesos ponderados. Primeramente se enlista los criterios acorde al orden de importancia, donde dicho orden dependerá de la experiencia del diseñador, enseguida se asigna un peso ponderado a cada criterio de acuerdo a su grado de importancia. Posteriormente se evalúa cada criterio asignándole el máximo valor al perfil con mejor desempeño y un valor proporcional al desempeño a los demás perfiles. Finalmente se suma los valores ponderados y se selecciona el perfil con el valor mas alto.

2.3.5 Estimación del coeficiente de potencia

Se debe realizar una estimación del C_p máximo al que el perfil elegido se va a desempeñar. Una vez seleccionado el perfil aerodinámico de acuerdo al paso anterior se debe estimar la máxima relación C_l/C_d que nos brinda dicho perfil considerando un número de Reynolds estimado de operación, una vez hallada dicha relación se puede estimar el C_p máximo que se puede obtener de dicho perfil con ayuda del gráfico de la figura 2.8. En dicha gráfica se observa el comportamiento del coeficiente de potencia en función de la relación C_l/C_d , dicha figura refleja las tendencias actuales [13].

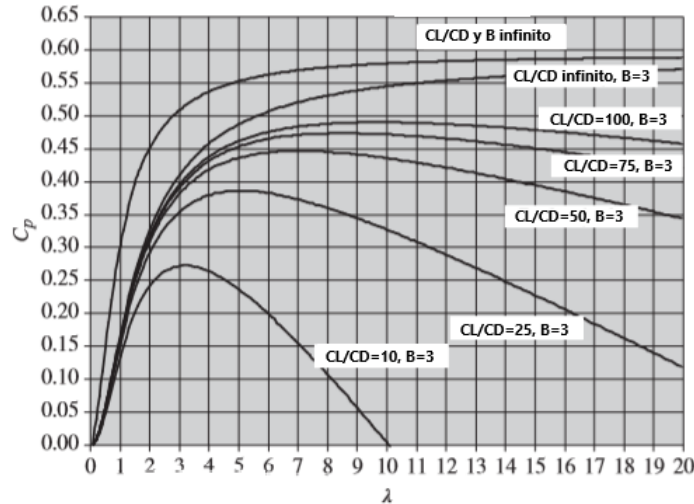


Figura 2.8: Coeficiente de potencia (C_p) en función de la velocidad específica (λ).

2.3.6 Determinar el diámetro de diseño del rotor eólico

El diámetro de diseño (D_d) del rotor determina el área de captación de energía cinética que producirá la potencia deseada. Para estimar dicho valor se debe tomar en cuenta la velocidad de viento de diseño (U_d), la potencia requerida (P_r) la densidad del aire (ρ), la eficiencia de componentes mecánicos (η_{me}) y eléctricos (η_{el}) mostrados en las ecs. (2.48), (2.49) respectivamente, además, se debe estimar un coeficiente de potencia (C_p).

A partir de la ec. (2.50) determinamos el área total (A_T) y así calcular el radio del rotor eólico R_d .

$$P_r = \frac{1}{2} \rho U_d^3 A_T C_p \eta_{me} \eta_{el} \quad (2.50)$$

Después se define el radio del buje r_b como el radio existente entre el centro del buje y el inicio del álabe, radio de conexión r_c como el radio donde se sujeta el álabe, y el radio de transición se extiende desde la conexión hasta el primer perfil aerodinámico r_t , se considera que dichas secciones aportan poca sustentación.

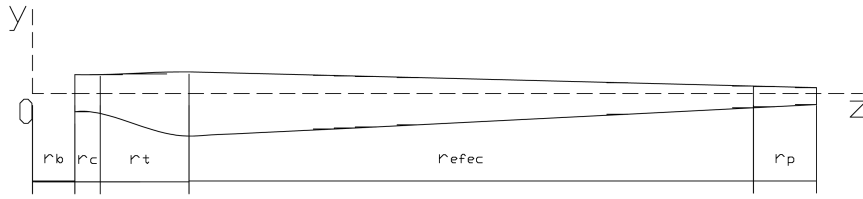


Figura 2.9: Secciones del álabe.

Se puede estimar una aproximación utilizando los siguientes valores: $r_b = 0.03R_d$, $r_c = 0.05R_d$, $r_t = 0.1R_d$.

2.3.7 Determinar la geometría del álabe

Como primer paso elegir el número de elementos en los que se desea dividir el álabe N , se recomienda usualmente entre 10 y 20 [7]. Después determinar la longitud efectiva del álabe el cual es la longitud del álabe que aporta la mayor sustentación, éste se determina mediante $r_{efec} = R_d - r_b - r_c - r_t - r_p$, esta longitud se puede observar en la figura 2.9

Calcular Δ_r

$$\Delta_r = \frac{r_{efec}}{N} \quad (2.51)$$

Calcular la posición de cada sección r_r mediante con la siguiente expresión:

$$r_r = r_b + r_c + r_t + i(\Delta_r) \quad (2.52)$$

Donde: i : número de sección, $i=0,1,2,\dots, N-1, N$

Determinar la distribución de cuerda y torsión a lo largo del eje longitudinal del álabe empleando el proceso iterativo que se muestra en la figura 2.10. El proceso iterativo inicia con la primera sección del álabe $i = 1$, primeramente se asume un número de Reynolds estimado Re usualmente para álabes de baja potencia $Re = 500,000$, posteriormente se calcula los coeficientes de sustentación C_l , coeficiente de arrastre C_d y coeficiente de momento C_m para diferentes ángulos de ataque α , enseguida se busca el ángulo de ataque donde la relación C_l/C_d sea máxima, dicho ángulo será el ángulo de ataque de la sección α_r , enseguida calcular la velocidad específica λ_r y ángulo de flujo ϕ_r para dicha sección. Siguiendo el diagrama de flujo se calcula la torsión β_r y cuerda C de dicha sección, así como la solidez σ , coeficiente de inducción axial a , coeficiente de inducción tangencial a' y velocidad relativa U_{rel} de la sección en cuestión, una vez determinado lo anterior guardar el número de Reynolds Re en una variable nueva Re_{ant} y calcular el número de Reynolds actual Re_{act} , una vez determinado lo anterior realizar un promedio de Re_{act} y Re_{ant} el cual se guarda en la variable Re . A continuación se realiza una comparación entre Re y Re_{ant} , si la diferencia es menor a un valor arbitrario muy pequeño el ciclo *for* para $i = 1$ termina y si no continua un ciclo iterativo hasta cumplir la condición, una vez terminado el ciclo se toma los valores de β_r y C lo cuales serán los valores de cuerda y torsión para la sección en cuestión, se sigue el mismo procedimiento para cada ciclo *for* hasta terminar en el ciclo $i = N$

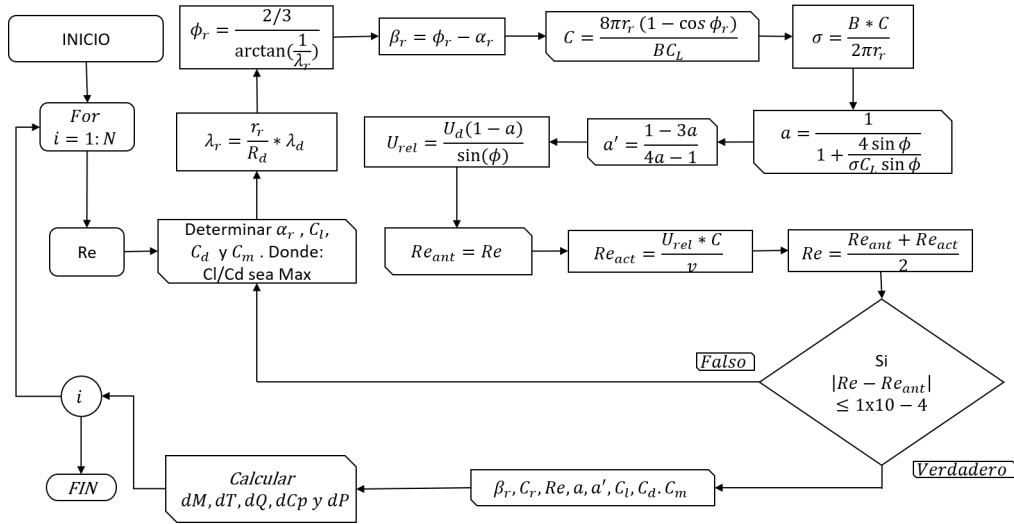


Figura 2.10: Diagrama de flujo para determinar la geometría del álabo.

2.3.8 Elegir una distribución lineal de cuerda y torsión

Con el objetivo de facilitar la manufactura, reducir peso y material se recomienda elegir una distribución lineal de cuerda y torsión del álabo que nos brinde una buena aproximación de desempeño aerodinámico [7]. La cuerda y torsión lineal se pueden expresar como [16]

$$c_i = a_1(r_i) + a_2 \quad (2.53)$$

$$\theta_{T,i} = b_1(r_i) + b_2 \quad (2.54)$$

donde r_i es la distribución de radios en el álabo; $i = 1, 2, \dots, N - 1, N$

El procedimiento consiste en elegir dos puntos a lo largo del álabo y hallar las constantes a_1 , a_2 , b_1 , y b_2 para (2.53) y (2.54). Una vez hallada las constantes se procede a tabular los valores lineales de cuerda y torsión.

2.3.9 Determinar el desempeño del álabo

Una vez determinada la geometría del álabo y los perfiles aerodinámicos se evalúa el desempeño aerodinámico del álabo con el cual se determina el momento M , torque T , empuje Q , potencia P y coeficiente de potencia C_p , para ello se emplea el siguiente algoritmo que fue adaptado de [7].

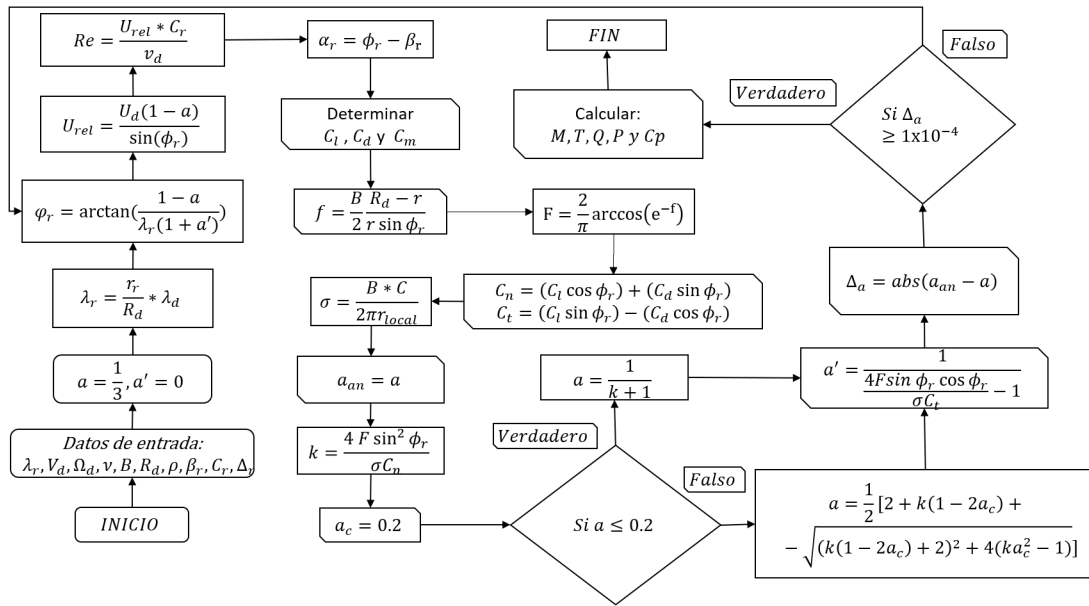


Figura 2.11: Diagrama de flujo para determinar el desempeño del álab.

El algoritmo inicia con datos de entrada del rotor tales como, radio de diseño R_d , velocidad angular de diseño del rotor Ω_d , viscosidad cinemática del aire v , velocidad de viento del diseño V_d , la ubicación de cada sección r_r , velocidad específica de diseño λ_d , densidad del aire ρ así como la distribución de cuerda C_r y torsión β_r y la longitud de cada sección Δ_r antes determinados. inicialmente se asumen valores de coeficiente de inducción axial $a = 1/3$ y tangencial $a' = 0$, después se determina la velocidad específica λ_r , ángulo de flujo ϕ_r , velocidad relativa U_{rel} , numero de Reynolds Re , angulo de ataque α_r de la sección en cuestión y después se determina C_l, C_d, C_m . Enseguida se calcula la perdidas del álab F , el coeficientes de inducción normal C_n , tangencial C_t y la solidez. A continuación se resguarda el valor del coeficiente de inducción axial a en una variable nueva a_{an} para poder utilizarlo mas adelante ($a_{an} = a$). Enseguida se aplica una corrección para valores altos de a , esto se debe a que el valor máximo que puede adquirir a es $1/3$ por tanto cuando se tienen valores mayores a $1/3$ se aplica un corrección conocida como corrección de Glauert, para tal corrección se aplica una condicionante, si $a < 0.2$ es verdadero, entonces a se determina mediante un modelo determinado, si es falso se determina mediante un modelo con correcciones. Siguiendo con el algoritmo se determina el coeficiente de inducción tangencial a' y posteriormente se calcula la diferencia entre el valor de coeficiente de inducción anterior a_{an} y el valor calculado a , si tal diferencia Δ_a es menor a un valor arbitrario muy pequeño se calcula el momento, torque, empuje, potencia y coeficiente de potencia (tales valores serán de dicha sección), Si no se cumple tal condicionante se calcula nuevamente el angulo de flujo con lo valores nuevos y se entra en un ciclo que termina hasta que se cumpla la condición deseada. Posteriormente se realiza la misma operación para cada sección.

2.4 Aplicación de la metodología para el diseño de un álabes de 10 kW de potencia

En esta sección se presenta el diseño de los álabes de un aerogenerador de 10 kW de potencia, dicho aerogenerador cuenta con un sistema de regulación de potencia activo y un sistema de transmisión de potencia directa. La velocidad angular nominal del generador eléctrico es de 225 rpm.

Las eficiencias de los componentes eléctricos y mecánicos que intervienen en la conversión de energía mecánica a eléctrica son asumidos, los cuales se muestran en la tabla 2.1. Se emplean perfiles aerodinámicos *DU91W250* para zona estructural del álabes y el perfil *DU93W210* para la zona aerodinámica.

Tabla 2.1: Especificaciones y requerimientos para el diseño del rotor eólico.

Descripción	Valor	Unidad
P_r	10	<i>kW</i>
U_d	11.2	<i>m/s</i>
Ω	225	<i>rpm</i>
ρ	1.115	<i>kg/m²</i>
B	3	[-]
C_p	0.48	[-]
η_{el}	0.85	[-]
η_m	0.98	[-]

Siguiendo la metodología presentada anteriormente, se determinan los valores de r_b , r_c y r_t , los cuales se muestran en la tabla 2.2, con lo que queda determinado el diámetro del rotor eólico y radio de diseño.

Tabla 2.2: Valores de la discretización del álabes.

Descripción	Valor (m)
r_b	0.094
r_c	0.1566
r_t	0.3132
R_d	3.1828

Se aplica (2.34) para calcular la velocidad específica de diseño, dado que ya se conoce la velocidad angular de diseño Ω_d y se sabe que el sistema de transmisión de potencia es directo, además, se conoce la velocidad de viento promedio según la clase de diseño U_d . La velocidad específica de diseño resulta $\lambda_d = 6.7$.

Se realiza un análisis para determinar el número de secciones óptimo en las que se debe discretizar el álabes, los resultados se presentan en la figura 2.12. En esta figura se observa la potencia generada en función del número de secciones N del álabes, en dicha

figura se aprecia que después de 30 secciones, la potencia converge y ya no presenta variación significativa.

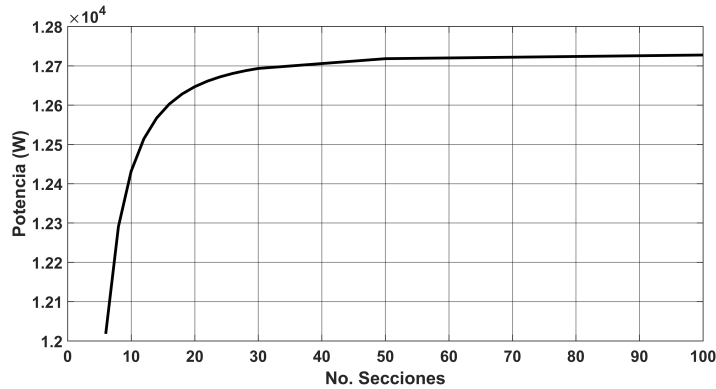
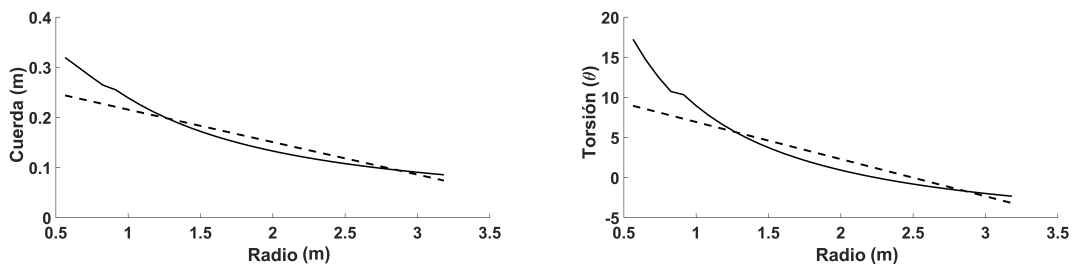


Figura 2.12: Potencia versus número de secciones.

Del análisis anterior, se discretiza el álabe en 30 secciones y se determina la geometría empleando el diagrama de flujo de la figura 2.10. Los resultados se muestran en las figuras 2.13a y 2.13b donde se observa que la distribución de cuerda y torsión respectivamente, se observa que estos presentan un comportamiento no lineal (líneas sólidas) lo que dificulta en la manufactura [7, 16].

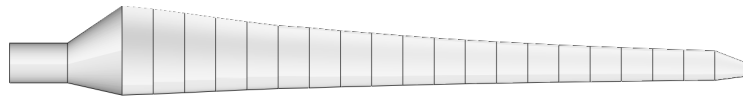
Se determina la distribución de cuerda lineal y torsión lineal (líneas discontinuas de la figura 2.13) siguiendo la metodología presentado por Azad [18]. El cual consiste en tomar los puntos correspondientes al 30 % y 90 % del álabe y hallar la ecuación de la línea recta que pase por ambos puntos, dicha función describirá la distribución de cuerda y torsión lineal los cuales se presentan en la Tabla 2.3.



(a) Distribución de cuerda en el eje del álabe. **(b) Distribución de torsión en el eje del álabe.**

Figura 2.13: Variación lineal y teórica de cuerda y torsión.

En la figura 2.14a se presenta una vista frontal del álabe donde se aprecia la distribución de cuerda teórico y en la figura 2.14b se observa el álabe con una distribución de cuerda lineal, se observa que hubo una reducción en la longitud de cuerda, por lo que se espera una reducción de volumen, en consecuencia se espera reducir peso y material de fabricación.



(a) **Álabe teórico.**



(b) **Álabe lineal.**

Figura 2.14: Comparación del álabe teórico y álabe lineal.

En la figura 2.15a se muestra una vista lateral del álabe donde se aprecia la distribución de torsión del álabe teórico y en la figura 2.15b se puede apreciar la variación de torsión lineal, con dicha técnica se espera reducir la dificultad en la manufactura.



(a) **Álabe teórico.**



(b) **Álabe lineal.**

Figura 2.15: Distribución de torsión teórica y torsión lineal.

Se evalúa el desempeño aerodinámico del álabe lineal en un software comercial a manera de validación. En la figura 2.16a se observa el comportamiento del coeficiente de potencia en función de la velocidad específica, se observa que a la velocidad específica de diseño ($\lambda = 6.7$) se alcanza el C_p máximo, lo cual es un resultado coherente. Se observa también el comportamiento de la potencia en función de la velocidad del viento (figura 2.16b) donde se observa que la potencia máxima se alcanza a velocidad angular de diseño que corresponde a 225 *rpm*, por tanto, queda validado el diseño aerodinámico.

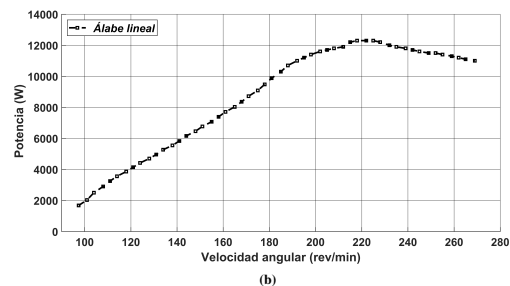
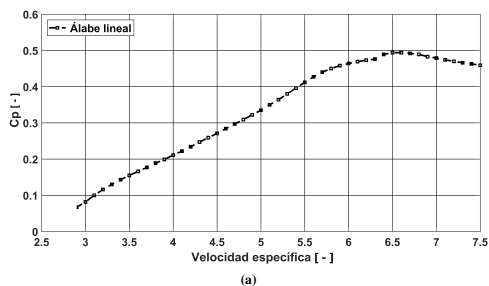


Figura 2.16: Coeficiente de potencia en función de la velocidad específica y potencia en función de la velocidad angular.

Tabla 2.3: Geometría del álabe.

álabe lineal			
r_{local} (<i>mm</i>)	Cuerda (<i>mm</i>)	β (<i>grad</i>)	Perfil (<i>-</i>)
0.564	0.270	10.6	DU91W250
0.651	0.263	10.1	'
0.738	0.257	9.7	'
0.826	0.250	9.2	'
0.913	0.243	8.7	'
1	0.237	8.3	'
1.088	0.230	7.8	'
1.175	0.223	7.3	'
1.262	0.217	6.8	'
1.35	0.210	6.4	'
1.437	0.203	5.9	DU93W210
1.524	0.197	5.5	'
1.611	0.190	5	'
1.699	0.183	4.5	'
1.786	0.177	4.1	'
1.873	0.170	3.6	'
1.961	0.163	3.1	'
2.048	0.157	2.6	'
2.135	0.150	2.2	'
2.222	0.143	1.7	'
2.31	0.137	1.3	'
2.397	0.130	0.8	'
2.484	0.124	0.3	DU93W118
2.572	0.117	-0.4	'
2.659	0.110	-0.6	'
2.746	0.104	-1	'
2.834	0.097	-1.5	'
2.921	0.090	-2	'
3.008	0.084	-2.5	'
3.095	0.077	-2.7	'
3.183	0.070	-3.4	'

Se evalúa la potencia y torque generados por el álabe en función de la velocidad del viento, los resultados se aprecian en la figura 2.17a y 2.17b respectivamente, se observa a la velocidad de diseño 11.2 se produce $10kW$ de potencia y un torque de $450Nm$.

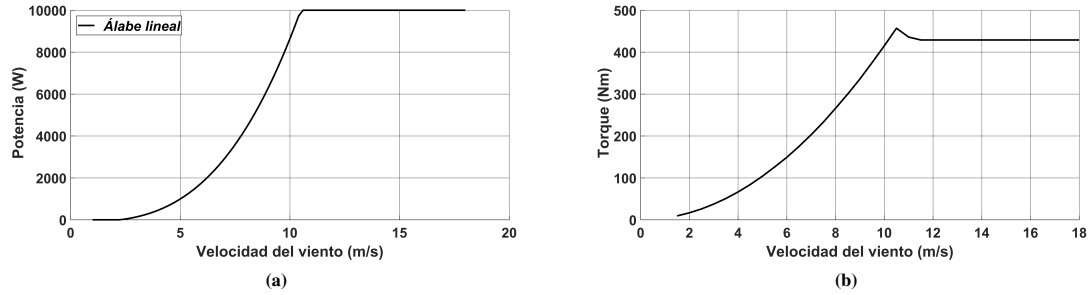


Figura 2.17: Potencia y torque en función de la velocidad del viento.

Se determinan las cargas aerodinámicas con ayuda del software comercial, para el caso cuando el aerogenerador experimenta velocidad de arranque, el cual llamaremos caso I. Se ingresan parámetros operacionales de dicho caso que corresponden a velocidad específica $\lambda = 6.7$, velocidad del viento $U = 3 \text{ m/s}$, velocidad angular $\Omega = 60.3 \text{ rpm}$. Los resultados se muestran en la figura siguiente.

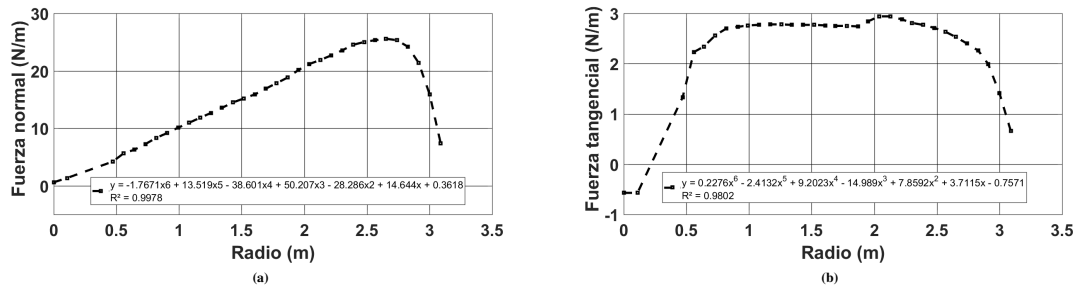


Figura 2.18: Fuerza normal distribuida y fuerza tangencial distribuida a lo largo del álabe para el caso I.

De igual forma se determinan las cargas aerodinámicas para el caso cuando el aerogenerador experimenta velocidad de viento nominal al cual se le denomina caso II. Los parámetros operacionales corresponden a los parámetros nominales, estos corresponden a velocidad específica $\lambda = 6.7$, velocidad del viento $U = 11.2 \text{ m/s}$ y velocidad angular $\Omega = 225 \text{ rpm}$. Los resultados se muestran en la figura 2.19

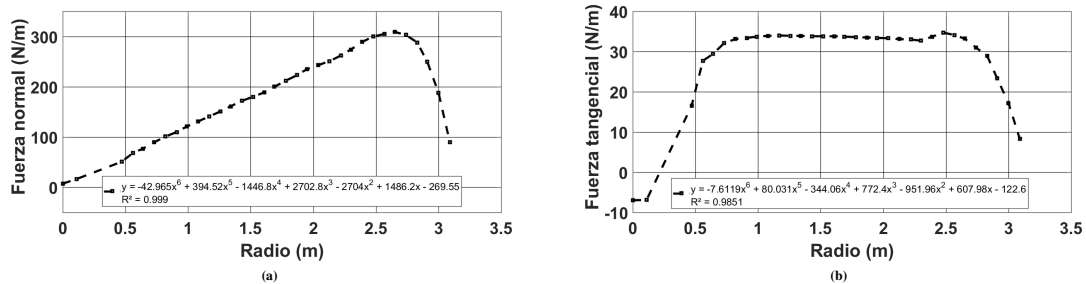


Figura 2.19: Fuerza normal distribuida y fuerza tangencial distribuida a lo largo del álabe para el caso II.

Se determinan cargas aerodinámicas para el caso cuando el aerogenerador experimenta velocidad de viento de 18 m/s al cual se le denomina caso de estudio III. Se considera

una velocidad específica $\lambda = 6.7$, velocidad del viento $U = 18 \text{ m/s}$, velocidad angular $\Omega = 225 \text{ rpm}$. Los resultados se muestran en la figura 2.20

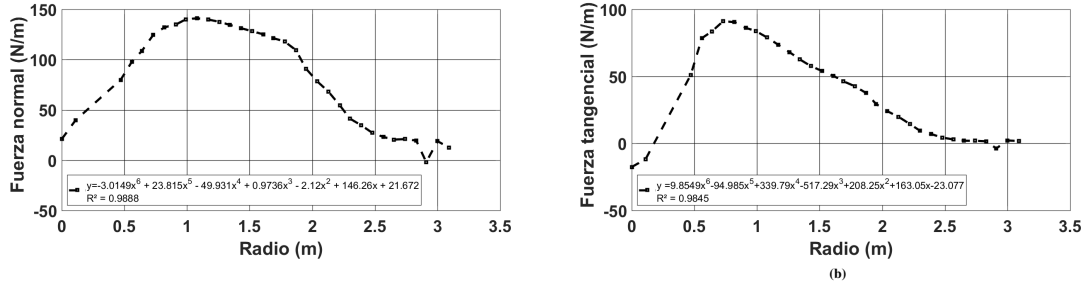


Figura 2.20: Fuerza normal distribuida y fuerza tangencial distribuida a lo largo del álabe para el caso III.

El cuarto caso analizado ocurre cuando el aerogenerador experimenta la velocidad a 50 años (V_{e50}). En este caso el aerogenerador esta en reposo mientras experimenta la velocidad de viento extrema. Se considera que este caso ocurre solo un vez en 50 años. Para éste caso, la norma IEC-61400-1 nos dice que las cargas deben calcularse asumiendo una velocidad de viento, igual a V_{e50} , para cada parte expuesta del aerogenerador y debe utilizarse la siguiente formula,

$$F_{alabe} = BC_d \frac{1}{2} \rho V_{e50}^2 A_{proj,B}$$

Donde:

B es el numero de álabes, C_d : Coeficiente de forma, el cual depende de la forma del elemento donde $C_d = 1.5$ para un álabe, ρ : es la densidad del aire, $\rho = 1.115$, $A_{proj,B}$ es el área proyectada por el elemento y V_{e50} es la velocidad a 50 años.

A partir de la norma IEC-61400-1 se tiene que $V_{e50} = 1.4V_{ref}(z/z_{hub})^{0.11}$

Donde:

V_{ref} : Es 37.5 de acuerdo a la norma IEC.

z : Es la altura a la que se desea determinar la velocidad.

z_{hub} : Es la altura del buje y corresponde a 18m

Primeramente se discretiza el álabe en 30 secciones y se calcula el área proyectada de cada sección, una vez hallada el área, se calcula la velocidad V_{e50} a la altura de buje y se aplica la formula F_{alabe} para fuerza axial para cada sección del alabe. Los resultados se muestran en la figura 2.21.

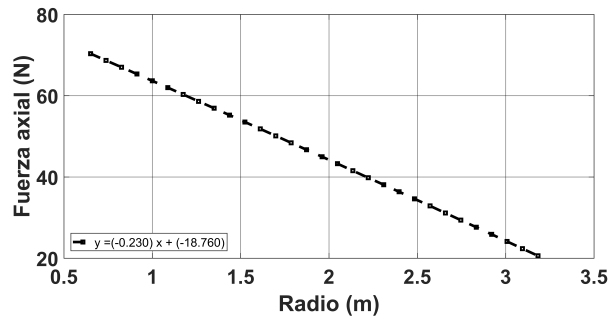


Figura 2.21: Fuerza axial a lo largo del álabe.

2.5 Conclusiones

En este capítulo se presentó una metodología explícita para diseñar álabes de aerogeneradores de eje horizontal, se realizó el diseño de un alabe para un aerogenerador de eje horizontal de 10 kW de potencia para tal diseño se empleó la teoría del momentum del elemento del álabe considerando un rotor óptimo con rotación de estela del cual se obtuvo la distribución de cuerda y torsión a lo largo del álabe. Posteriormente se eligió una distribución de cuerda y torsión lineal con la finalidad de reducir costos de fabricación, después se validó la geometría del álabe en un software comercial y finalmente se determinaron la fuerza axial y fuerza tangencial para cuatro casos de estudio.

Determinación de las deflexiones del álabe bajo cargas aerodinámicas

3.1 Introducción

En este capítulo se determina la deflexión del álabe debido a cargas aerodinámicas, sin considerar cargas inerciales. Se considera que el álabe presenta variación de cuerda, torsión y rigidez a lo largo de su eje longitudinal. Se considera que las cargas transversales pasan por el centro cortante de la sección transversal, por tanto, los efectos de flexo-torsión están desacoplados y las cargas transversales producirán una deflexión transversal en la dirección de la carga y una rotación de la sección transversal. Se discretiza el álabe en n secciones y se abordan como elementos finitos de viga (se considera que cada sección del álabe es muy pequeña y por lo tanto presenta poca variación de cuerda y torsión), posteriormente se realiza una formulación de elementos finitos unidimensionales lo que constituye una aproximación del álabe y se obtiene la respuesta estática del álabe considerando cargas aerodinámicas, finalmente se presenta una validación de resultados.

3.2 Ecuación general de un elemento finito de viga

Principio del trabajo virtual

En esta sección se deriva la ecuación general de un elemento finito para un sistema dinámico, después se simplifica a un caso estático. Se parte del principio de trabajo virtual el cual establece que:

Si un cuerpo deformable en equilibrio está sujeto a desplazamientos arbitrarios virtuales asociados con deformaciones compatibles del cuerpo, el trabajo virtual de fuerzas externas del cuerpo es igual a la energía de deformación virtual de esfuerzos internos [19]

Matemáticamente para un elemento finito tenemos

$$\delta U^{(e)} = \delta W^{(e)} \quad (3.1)$$

Donde $\delta U^{(e)}$ es la energía de deformación virtual debida a esfuerzos internos y $\delta W^{(e)}$ es el trabajo virtual de fuerzas externas en el cuerpo. La energía de deformación virtual debido a esfuerzos internos esta dado por

$$\delta U^{(e)} = \iiint_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (3.2)$$

Se observa que la energía de deformación interna es debida a los esfuerzos internos moviéndose a través de deformaciones virtuales $\delta \boldsymbol{\epsilon}$.

El trabajo virtual de fuerzas externas es debida fuerzas externas, de superficie y nodales. Adicionalmente aplicando el principio de D'Alembert agregamos fuerzas inerciales $\rho \ddot{u}dV$, $\rho \ddot{v}dV$, $\rho \ddot{w}dV$, donde el doble punto ($\ddot{}$) indica la segunda derivada de la posición u, v, w en la dirección x, y, z respectivamente con respecto al tiempo. De acuerdo a D'Alembert estas fuerzas inerciales actúan en dirección opuesta al sentido de la aceleración. El trabajo externo virtual se expresa como

$$\delta W^{(e)} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_p + \iint_s \delta \boldsymbol{\psi}_s^T \mathbf{f}_s ds + \iiint_v \delta \boldsymbol{\psi}^T (\mathbf{f}_v - \rho \ddot{\boldsymbol{\psi}}) dv \quad (3.3)$$

Donde $\delta \mathbf{d}$ es el vector de desplazamientos nodales virtuales, $\delta \boldsymbol{\psi}_s^T$ y $\delta \boldsymbol{\psi}^T$ son las funciones vectoriales de desplazamientos virtuales debidas a cargas de superficie y volumétricas respectivamente, \mathbf{f}_p es el vector de carga nodal, \mathbf{f}_s es el vector de fuerza de superficie por unidad de área, y \mathbf{f}_v es el vector de fuerzas del cuerpo por unidad de volumen. Sustituyendo (3.2) y (3.3) en (3.1), tenemos

$$\iiint_v \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_p + \iint_s \delta \boldsymbol{\psi}_s^T \mathbf{f}_s ds + \iiint_v \delta \boldsymbol{\psi}^T (\mathbf{f}_v - \rho \ddot{\boldsymbol{\psi}}) dv \quad (3.4)$$

Como se muestra más adelante, se emplean funciones de forma para relacionar funciones de desplazamiento y desplazamientos nodales.

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (3.5)$$

La deformación está relacionada con el desplazamiento nodal mediante $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}$ y el esfuerzo esta relacionado con la deformación mediante $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}$.

Haciendo sustituciones de las identidades de deformación/desplazamiento y esfuerzo/deformación en (3.4), tenemos

$$\int_v \delta \mathbf{d}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{d} dv = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_p + \iint_s \delta \mathbf{d}^T \mathbf{N}_s^T \mathbf{f}_s ds + \iiint_v \delta \mathbf{d}^T \mathbf{N}^T (\mathbf{f}_v - \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{d}}) dv \quad (3.6)$$

Tomando en cuenta que las funciones de forma son independientes del tiempo.

$$\delta \mathbf{d}^T \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d v = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_p + \delta \mathbf{d}^T \iint_s \mathbf{N}_s^T \mathbf{f}_s d s + \delta \mathbf{d}^T \iiint_v \mathbf{N}^T (\mathbf{f}_v - \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{d}}) d v \quad (3.7)$$

Como $\delta \mathbf{d}^T$ es un vector de desplazamiento virtual nodal arbitrario común en todos los términos de la ecuación, la siguiente relación es verdadera

$$\iiint_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d v \mathbf{d} = \mathbf{f}_p + \iint_s \mathbf{N}_s^T \mathbf{f}_s d s + \iiint_v \mathbf{N}^T \mathbf{f}_v d v + \iiint_v \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d v \ddot{\mathbf{d}} \quad (3.8)$$

Se define

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(e)} &= \iiint_v \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d v \\ \mathbf{K}^{(e)} &= \iiint_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d v \\ \mathbf{f}_p^{(e)} &= \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_s^{(e)} &= \iint_s \mathbf{N}_s^T \mathbf{T} d s \\ \mathbf{f}_b^{(e)} &= \iiint_v \mathbf{N}^T \mathbf{X} d v \end{aligned} \quad (3.9)$$

Empleando (3.9) en (3.8) y ordenando términos, tenemos

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{d} = \mathbf{f}_p^{(e)} + \mathbf{f}_s^{(e)} + \mathbf{f}_b^{(e)} \quad (3.10)$$

Donde la expresión $^{(e)}$ denota un elemento finito de viga, la matriz $\mathbf{M}^{(e)}$ es una matriz de masa consistente del elemento, $\mathbf{K}^{(e)}$ es la matriz de rigidez del elemento, $\mathbf{f}_s^{(e)}$ es la matriz de cargas nodales equivalentes del elemento debido a fuerzas de la superficie, $\mathbf{f}_p^{(e)}$ es la matriz de cargas nodales equivalentes del elemento debido a fuerzas del cuerpo. Para problemas estáticos, tenemos que la aceleración $\ddot{\mathbf{d}}$ es igual a cero, entonces se obtiene

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{d} = \mathbf{f}_p^{(e)} + \mathbf{f}_s^{(e)} + \mathbf{f}_b^{(e)} \quad (3.11)$$

Principio de energía potencial mínima

En esta sección se deriva la ecuación de un elemento finito empleando el principio de energía potencial mínima. La energía potencial de una viga es la suma de la energía potencial de deformación y la energía potencial de fuerzas externas.

$$\pi^{(e)} = U^{(e)} + W^{(e)} \quad (3.12)$$

Donde la expresión unidimensional general para la energía de deformación u de una viga que obedece la ley de Hooke, está dado por la expresión (3.13).

$$U^{(e)} = \iiint_v \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon} dv \quad (3.13)$$

Donde $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x)$ es el esfuerzo en función de x y $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(x)$ es la deformación en función de x .

Para un elemento de viga sujeto a cargas del cuerpo, distribuidas y nodales concentradas, la energía potencial de fuerzas externas es opuesta en signo a la expresión de trabajo externo porque la energía potencial de fuerzas externas disminuye cuando realiza el trabajo.

$$\delta W^{(e)} = \mathbf{d}^T \mathbf{f}_p + \iint_s \boldsymbol{\psi}_s^T \mathbf{t} ds + \iiint_v \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} dv \quad (3.14)$$

Los términos del lado derecho representan la energía potencial debido al cuerpo, típicamente del propio peso de elemento (en unidades de fuerza por unidad de volumen) moviéndose a través de desplazamiento \mathbf{u} , cargas de superficie \mathbf{t} (en unidades de fuerza por unidades de superficie de área actuando en la superficie S y moviéndose a través de desplazamientos \mathbf{u}_s donde actúa \mathbf{t}), fuerzas concentradas nodales \mathbf{f}_p moviéndose a través de desplazamientos \mathbf{d} . L es la longitud del elemento de viga.

Ahora se describirá la formulación de las ecuaciones de un elemento finito de viga utilizando el principio de energía potencial mínima aplicando los siguientes pasos.

1. Formular una expresión para la energía potencial total.
2. Asumir un modelo para el desplazamiento que varíe con el conjunto finitos de parámetros indeterminados (Los parámetros indeterminados son los desplazamientos nodales quienes son sustituidos en la expresión de la energía potencial mínima).
3. Obtener un conjunto de ecuaciones minimizando la energía potencial total con respecto a las variables nodales. Las ecuaciones resultantes representan las ecuaciones del elemento.

La expresión de energía potencial total para un elemento diferencial de viga es:

$$\pi^{(e)} = \iiint_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv - \mathbf{d}^T \mathbf{f}_p - \iint_s \boldsymbol{\psi}_s^T \mathbf{t} ds - \iiint_v \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} dv \quad (3.15)$$

Se emplean funciones de forma para expresar funciones de desplazamientos en términos de deformaciones nodales.

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{N} \mathbf{d}$$

Donde las expresiones \mathbf{N} son matrices de función de forma evaluadas en la superficie donde actúa la carga, \mathbf{d} es el vector que contiene los desplazamientos nodales.

Se usa la relación deformación/desplazamiento $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\psi}/dx$, donde se puede escribir como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dx}(\mathbf{N}\mathbf{d}) \quad (3.16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (3.17)$$

De mecánica de materiales tenemos que el esfuerzo está relacionado con la deformación mediante $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$. Haciendo sustituciones de las identidades antes descritas en (3.4), tenemos

$$\pi^{(e)} = \iiint_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv - \mathbf{d}^T \mathbf{f}_p - \mathbf{d}^T \int_s \mathbf{N}_s^T \mathbf{t} ds - \mathbf{d}^T \iiint_v \mathbf{N}^T \mathbf{b} dv \quad (3.18)$$

Se puede observar que la expresión (3.18) está en función de \mathbf{d} , esto es que $\pi(\mathbf{d})$, regularmente \mathbf{B} y \mathbf{D} no están en función de x . Obteniendo la integral primera de (3.18) con respecto a x tenemos

$$\pi^{(e)} = \iiint_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv - \mathbf{d}^T \mathbf{f} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_b \quad (3.20)$$

De la expresión (3.20) podemos separar tres tipos de contribuciones de carga, cargas concentradas nodales, cargas de superficie, y cargas del cuerpo, respectivamente. Se define que

$$\mathbf{f}_s = \int_s \mathbf{N}_s^T \mathbf{t} ds \quad (3.21)$$

$$\mathbf{f}_b = \iiint_v \mathbf{N}^T \mathbf{b} dv \quad (3.22)$$

Las cargas calculadas por (3.21) y (3.22) son llamadas consistentes por que están basados en la misma función de forma utilizado para determinar la matriz de rigidez del elemento.

Aplicando el principio de energía potencial mínima tenemos

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{d}} = \iiint_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv - \mathbf{f} = 0 \quad (3.23)$$

Donde se define

$$\mathbf{K} = \iiint_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (3.24)$$

Por tanto

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{K}\mathbf{d} - \mathbf{f} = 0 \quad (3.25)$$

La expresión (3.25) gobierna el comportamiento estático de un elemento finito de viga. Donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez del elemento, \mathbf{d} es el vector de desplazamiento del elemento y \mathbf{f} es el vector de fuerzas.

3.3 Deformación axial

Con la finalidad de ilustrar el método de elemento finito e introducir conceptos empleados se modela la deformación axial por su simplicidad a manera de ejemplo. Se considera un elemento de barra (ver figura 3.1) elástico lineal, con sección transversal constante, longitud inicial L , el cual solo estará sujeto a fuerzas de tensión T a lo largo de su eje axial x . Los puntos 1 y 2 están ubicados en los extremos terminales del elemento, estos puntos son llamados nodos del elemento. Las fuerzas nodales locales f_{1x} y f_{2x} del elemento están asociados con el eje local x . Los desplazamientos nodales locales son u_1 y u_2 corresponden a los grados de libertad de cada nodo como se puede observar en la figura 3.1 [19].

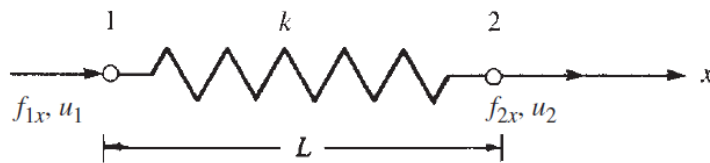


Figura 3.1: Resorte sujeto a deformación axial.

Utilizando el método de rigidez directa derivaremos la matriz de rigidez para un resorte lineal unidimensional, esto es, que el resorte obedece a la ley de Hooke y resiste fuerzas solo en la dirección del resorte.

Por tanto haciendo uso de (3.11), y considerando que solo existen fuerzas nodales, se tiene que

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (3.26)$$

Donde, \mathbf{K} es una matriz tal que $\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{d}$, \mathbf{d} es el desplazamiento nodal y \mathbf{f} es son las fuerzas locales de un elemento simple. Para un medio continuo o una estructura compartiendo una serie de elementos, una matriz de rigidez \mathbf{K} relaciona los desplazamientos nodales \mathbf{d} y las fuerzas globales \mathbf{F} de la estructura en el sistema coordenado global.

Ahora utilizaremos los pasos generales para derivar para derivar la matriz de rigidez del elemento de resorte.

Paso 1. Selecciona el tipo de elemento

Se considera un elemento de resorte lineal (puede ser un elemento o un sistema de elementos) sujeto a una fuerza de tensión nodal resultante T en la dirección axial del resorte como se muestra en la figura 3.2 el cual está en equilibrio. El eje local x es dirigido del nodo 1 al nodo 2. Se representa el elemento de resorte etiquetando cada extremo del nodo

y etiquetando el número de elemento. La distancia entre nodos antes de la deformación es L . La propiedad del material del elemento es k .

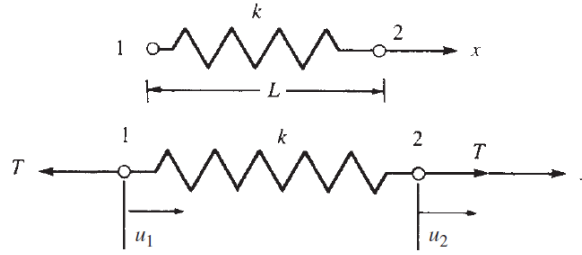


Figura 3.2: Elemento de resorte con desplazamientos nodales positivos.

Paso 2. Selecciona una función de desplazamiento

Se selecciona una función matemática que modela la deformación de un elemento de resorte bajo la acción de la carga. Se debe asumir la forma o la distribución del desplazamiento del elemento utilizando una función matemática apropiada, los más comunes son funciones polinómicas. En general el número total de coeficientes del polinomio debe ser igual al número total de grados de libertad del elemento. Aquí el número de grados de libertad del elemento son dos, siendo estos d_{1x} y d_{2x} a lo largo de la dirección x . Se selecciona una función de desplazamiento dado por (3.27) que representa los desplazamientos axiales a través del elemento.

$$u = a_1 + a_2x \quad (3.27)$$

En forma matricial se representa como:

$$u = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Ahora se requiere expresar a u como una función de los desplazamientos nodales d_{1x} y d_{2x} para ello debemos aplicar las condiciones de frontera físicas en los desplazamientos nodales. Evaluando a u en cada nodo y resolviendo para a_1 y a_2 como sigue.

$$u(0) = d_{1x} = a_1 \quad (3.29)$$

$$u(L) = d_{2x} = a_2L + d_{1x} \quad (3.30)$$

o resolviendo (3.30) para a_2 ,

$$a_2 = \frac{d_{2x} - d_{1x}}{L} \quad (3.31)$$

sustituyendo (3.29) y (3.30) en (3.27), tenemos.

$$u = \left(\frac{d_{2x} - d_{1x}}{L} \right) x + d_{1x} \quad (3.32)$$

en forma matricial

$$u = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L}\right] \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

$$u = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Donde N_1 y N_2 son conocidas como función de forma porque expresan la forma de la función de desplazamiento asumida en el dominio del elemento (coordenada x), cuando el enésimo grado de libertad del elemento tiene un valor, todos los otros grados de libertad son cero. En este caso N_1 y N_2 son funciones lineales y tiene la propiedad que $N_1 = 1$ en el nodo 1 y $N_1 = 0$ en el nodo 2, de igual forma $N_2 = 1$ en el nodo 2 y $N_2 = 0$ en el nodo 1 como se observa en la figura 3.3 [19].

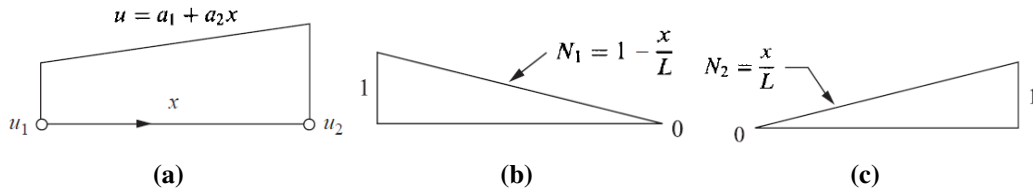


Figura 3.3: a) Función de desplazamiento b) Función de forma N_1 c) Función de forma N_2 en el dominio del elemento.

Se define

$$\mathbf{N} = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L}\right] \quad (3.35)$$

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Paso 3. Definir la relación esfuerzo/deformación y deformación/desplazamiento

La relación deformación/desplazamiento es $\epsilon_x = du/dx$

$$\epsilon_x = \mathbf{Bd} \quad (3.37)$$

se define \mathbf{B} como la matriz gradiente

$$\mathbf{B} = \left[-\frac{x}{L} \quad \frac{x}{L}\right] \quad (3.38)$$

y la relación esfuerzo/deformación obedece la ley de Hooke

$$\sigma_x = \mathbf{D}\epsilon_x \quad (3.39)$$

Paso 4. Derivar la matriz de rigidez del elemento

Ahora sustituyendo las relaciones esfuerzo/deformación y deformación/desplazamiento en (3.24)

$$\mathbf{K}^{(e)} = EA \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx$$
$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{l} & -\frac{AE}{l} \\ -\frac{AE}{l} & \frac{AE}{l} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

En la matriz esfuerzo/deformación unidimensional \mathbf{D} , EA es la rigidez axial donde E es el modulo de elasticidad del material y éste es constante en el área de la sección transversal.

$$\mathbf{D} = E \int_A dx \quad (3.41)$$

Paso 5. Ensamblar las ecuaciones de los elementos para obtener la ecuación global e introducir condiciones de continuidad

La matriz de rigidez global y la matriz de fuerzas globales son ensambladas utilizando ecuaciones de fuerza nodales, fuerza/deformación y ecuaciones de compatibilidad descritos más adelante, y el método directo de rigidez descrito a continuación.

Este paso se aplica para estructuras complejas de más de un elemento

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}] = \sum_{e=1}^N \mathbf{K}^{(e)} \quad y \quad \mathbf{F} = [\mathbf{F}] = \sum_{e=1}^N \mathbf{f}^{(e)} \quad (3.42)$$

Donde \mathbf{K} y \mathbf{f} son matrices de rigidez y fuerzas expresadas en un marco de referencia global. Donde \sum implica la sumatoria de todos los elementos de rigidez de acuerdo al método de rigidez directa descrito más adelante.

Paso 6. Resolver los desplazamientos nodales

Los desplazamientos son determinados imponiendo condiciones de frontera y resolviendo el sistema de ecuaciones $\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{d}$ simultáneamente.

Ejemplo estándar

Considere el ejemplo de ensamblado de dos resortes mostrado en la figura 3.4. Este ejemplo es suficiente para mostrar el método de rigidez directa para obtener la matriz de rigidez global del ensamblado de resortes. Este método está basado en la superposición apropiada de elementos individuales de matrices de rigidez individuales hasta formar la

estructura deseada.

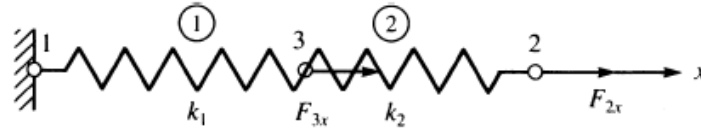


Figura 3.4: Ensamblado de dos resortes.

Aquí el nodo 1 está fijo y se aplica una fuerza F_{3x} en el nodo 3 y F_{2x} en el nodo 2. La rigidez del elemento 1 y elemento 2 son k_1 y k_2 respectivamente. Los nodos del elemento son enumeradas 1, 3 y 2.

La ecuación del elemento 1 es,

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x}^{(1)} \\ d_{3x}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Para el elemento 2 es

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{3x}^{(2)} \\ d_{2x}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Las ecuaciones de los elementos 1 y 2 descritas por (3.43) y (3.44), no están asociadas a los mismos grados de libertad. Esto es, el elemento 1 está asociado con desplazamientos axiales del nodo 1 y nodo 3, mientras el elemento 2 está asociado a los desplazamientos del nodo 3 y 2. Para superponer las matrices de rigidez, debemos expandirlos al orden del tamaño de la matriz de rigidez de la estructura; esto es, la matriz de rigidez del elemento está asociado con los grados de libertad total del elemento.

Para el elemento 1, la matriz de rigidez es

$$\begin{Bmatrix} f_{1x}^1 \\ f_{2x}^1 \\ f_{3x}^1 \end{Bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x}^{(1)} \\ d_{2x}^{(1)} \\ d_{3x}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

De igual forma para el elemento 2, tenemos

$$\begin{Bmatrix} f_{1x}^2 \\ f_{2x}^2 \\ f_{3x}^2 \end{Bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x}^{(2)} \\ d_{2x}^{(2)} \\ d_{3x}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

Ahora considerando la fuerza de equilibrio de cada nodo resulta en:

$$\begin{Bmatrix} f_{1x}^1 \\ 0 \\ f_{3x}^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{2x}^1 \\ f_{3x}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

La expresión (3.47) en términos de (3.45) y (3.46) se expresa como:

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x}^{(1)} \\ d_{2x}^{(1)} \\ d_{3x}^{(1)} \end{Bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x}^{(2)} \\ d_{2x}^{(2)} \\ d_{3x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

Simplificando (3.48) resulta en:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

Expandir los las matrices de rigidez de cada elemento, permite sumar directamente la matriz de rigidez global de la estructura, este método es conocido como el método de rigidez directa. Este es el paso más importante el método de elemento finito.

Condiciones de frontera

Existen dos tipos de condiciones de frontera , la mas común son las condiciones de frontera homogéneas y éstas son las no permiten ningún tipo de movimiento, por otro lado, las condiciones no homogéneas son las que permiten valores de desplazamiento finito o desplazamiento definido.

Se considera las ecuaciones derivadas para la figura 3.4. Aquí tenemos que $d_{1x} = 0$ porque el nodo 1 está fijo. Entonces podemos escribir

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ d_{2x} \\ d_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

La expresión (3.50) puede escribirse en su forma expandida como

$$\begin{aligned} k_1(0) + (0)d_{2x} - k_1d_{3x} &= F_{1x} \\ 0(0) + k_2d_{2x} - k_2d_{3x} &= F_{2x} \\ -k_1(0) - k_2d_{2x} + (k_1 + k_2)d_{3x} &= F_{3x} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Donde F_{1x} es una reacción y F_{2x} y F_{3x} son fuerzas aplicadas conocidas. Escribiendo la segunda y tercera expresión de (3.51), tenemos:

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{2x} \\ d_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

Por tanto, para condiciones de borde homogéneos la matriz de rigidez simplificada se puede obtener directamente eliminando la fila y columna correspondiente al grado de

libertad con desplazamiento cero. Finalmente se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtienen los desplazamientos d_i .

Ejemplo 2

Se considera el sistema de resortes de la figura 3.5 el cual fue tomado de [19], se desea obtener: a) la matriz de rigidez global, b) los desplazamientos de los nodos 3 y 4, la fuerza de reacción en los nodos 1 y 2 y las fuerzas de cada resorte. Una fuerza de 5000N es aplicado en el nodo 4 en la dirección x . Las constantes del resorte se especifican en la figura. Los nodos 1 y 2 están fijos.

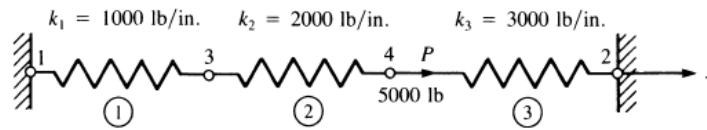


Figura 3.5: Ensamblado de tres resortes.

a) se hace uso de (3.40) para obtener la matriz de rigidez de cada elemento.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} & \mathbf{K}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 2000 & -2000 \\ -2000 & 2000 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}^{(3)} &= \begin{bmatrix} 3000 & -3000 \\ -3000 & 3000 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.53)$$

ahora usando el concepto de superposición (método de rigidez directa), se obtiene la matriz de rigidez global. aplicando (3.42), esto es:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} + \mathbf{K}^{(3)}$$

ó

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & -3000 \\ -1000 & 0 & 1000 + 2000 & -2000 \\ 0 & -3000 & -2000 & 2000 + 3000 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

b) La matriz de rigidez global (3.54), relaciona las fuerzas globales con los desplazamientos mediante

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \\ F_{4x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & -3000 \\ -1000 & 0 & 1000 + 2000 & -2000 \\ 0 & -3000 & -2000 & 2000 + 3000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{3x} \\ d_{4x} \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

Aplicando las condiciones de frontera homogéneas $d_{1x} = 0$ y $d_{2x} = 0$ a (3.55), sustituyendo las fuerzas nodales aplicadas (eliminando las filas y columnas de \mathbf{K} correspondientes a desplazamiento cero) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 5000 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 & -2000 \\ -2000 & 5000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{3x} \\ d_{4x} \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

Resolviendo (3.56), se obtiene los desplazamientos nodales globales.

$$d_{3x} = \frac{10}{11} \text{ in} \quad d_{4x} = \frac{15}{11} \quad (3.57)$$

c) Para obtener las fuerzas globales nodales (los cuales incluyen las reacciones en el nodo 1 y nodo 2, debemos sustituir (3.57) y las condiciones de frontera homogéneas $d_{1x} = 0$ y $d_{2x} = 0$ en (3.55). Esta sustitución resulta en:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \\ F_{4x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & -3000 \\ -1000 & 0 & 1000 + 2000 & -2000 \\ 0 & -3000 & -2000 & 2000 + 3000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{10}{11} \\ \frac{15}{11} \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

Multiplicando las matrices de (3.58) y simplificando obtenemos las fuerzas en cada nodo.

$$\begin{aligned} F_{1x} &= \frac{-10000}{11} \text{ lb} & F_{2x} &= \frac{-45000}{11} \text{ lb} & F_{3x} &= 0 \\ F_{4x} &= \frac{-55000}{11} \text{ lb} \end{aligned} \quad (3.59)$$

3.4 Deformación transversal

Se analizará una viga prismática el cual esta sometido a flexión pura. Se considera que la viga es inicialmente rígida, de longitud l y sección transversal constante. Los desplazamientos y rotaciones se describen en el sistema referencia (x, y, z) . El origen O esta ubicado en el extremo izquierdo de la viga y se sitúa en la línea que pasa por el centro de pandeo de las secciones transversales de la viga.

Ahora seguiremos los mismos pasos de la sección anterior para derivar la matriz de rigidez y las ecuaciones de un elemento de viga y después ilustrar la solución completa de la viga. Considere un elemento de viga mostrado en la figura 3.6 de longitud L con coordenada local en el eje axial x y coordenada local en el eje transversal y . Los desplazamientos nodales transversales están dados por f_{1y} y f_{2y} , los momentos flexionantes por m_1 y m_2 como se muestra. Se ignoran los efectos axiales.

Se representa a la viga mediante nodos etiquetados en cada extremo y se muestra en la figura 3.6. La relación deformación/desplazamiento se obtiene de las ecuaciones (A.25) y (A.26)

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}(x) &= -y \frac{d\theta_z(x)}{dx} = 0 \\ \epsilon_{xy}(x) &= \theta_z(x) + \frac{dv(x)}{dx} = 0 \end{aligned}$$

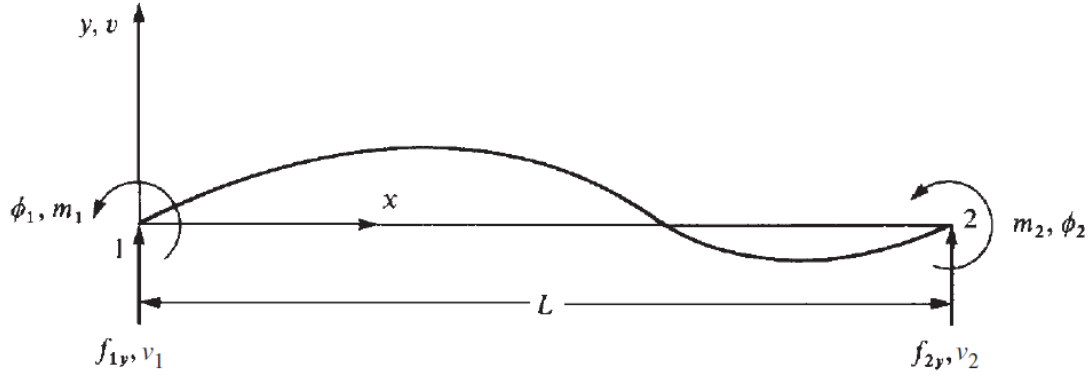


Figura 3.6: Elemento de viga sometido a desplazamientos, fuerzas, rotaciones y momentos nodales.

El giro y el desplazamiento trasversal se aproximan independientemente y las funciones de forma son $\phi = \mathbf{N}\mathbf{d}$ y $v = \mathbf{N}\mathbf{d}$

$$\phi = N_1(x)\phi_1 + N_2(x)\phi_2 \quad (3.60)$$

$$v = N_1(x)v_1 + N_2(x)v_2 \quad (3.61)$$

Donde $N_1(x)$ y $N_2(x)$ son las funciones de forma.

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{l}$$

$$N_2(x) = \frac{x}{l}$$

Se puede expresar la relación esfuerzo/deformación empleando las funciones de forma como

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_1(x)}{dx} & 0 & \frac{dN_2(x)}{dx} \\ \frac{dN_1(x)}{dx} & -N_1(x) & \frac{dN_2(x)}{dx} & -N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

Se define

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_1(x)}{dx} & 0 & \frac{dN_2(x)}{dx} \\ \frac{dN_1(x)}{dx} & -N_1(x) & \frac{dN_2(x)}{dx} & -N_2(x) \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

La relación esfuerzo/deformación esta dado por $\sigma = \mathbf{D}\epsilon$, por tanto puede re-expresarse como,

$$\sigma = DBd \quad (3.64)$$

Se determina la matriz de rigidez a partir de (3.24).

$$\mathbf{K} = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx$$

Donde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GAk \end{bmatrix}$$

Por tanto, la matriz de rigidez es,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{AGk}{l} & \frac{AGk}{2} & -\frac{AGk}{l} & \frac{AGk}{2} \\ \frac{AGk}{2} & \frac{EI}{l} + \frac{1}{3}AGkl & -\frac{1}{2}AGk & -\frac{EI}{l} + \frac{1}{6}AGkl \\ -\frac{AGk}{2} & -\frac{1}{2}AGk & \frac{AGk}{l} & -\frac{1}{2}AGk \\ \frac{AGk}{2} & -\frac{EI}{l} + \frac{1}{6}AGkl & -\frac{1}{2}AGk & \frac{EI}{l} + \frac{1}{3}AGkl \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

La expresión (3.65) es la matriz de rigidez de un elemento finito de viga para deformación transversal [20], la cual se obtuvo considerando la teoría de vigas de Timoshenko, el cual considera efectos por esfuerzos cortantes, aquí, E es el módulo de elasticidad, G es el módulo de rigidez cortante, k es el factor de corrección de cortante, I es el momento de inercia de área definido como $I = \iint_A y^2 dA$.

3.5 Validación del modelado empleando una viga de sección transversal constante

Se considera la viga de la figura 3.7, el cual tiene una longitud $R = 3.189m$, sección transversal constante de geometría cuadrada y espesor $h = 0.2m$ (ver figura 3.7a), módulo de rigidez cortante $G = 2.89Gpa$, módulo de elasticidad $E = 17.7Gpa$, momento de inercia de área $I_x = 0.00013m^4$, densidad $1900kg/m^3$, factor de corrección por cortante $k = 0.85$ (vigas de sección transversal rectangular). Se somete la viga a cargas aerodinámicas correspondientes al caso II, como se observa en la figura 3.7a.

Formulación del problema

Se divide la viga en 30 secciones (ver figura 3.7b) y se realiza una formulación mediante elementos finitos unidimensionales. Dado que la viga está sometida a cargas transversales, se emplea la matriz de un elemento finito de viga para deformaciones transversales descrita en (3.65).

Siguiendo la metodología presentada en la sección anterior se determina la matriz de rigidez de cada elemento y se guardan en una matriz consistente con el número de elementos $\mathbf{K}_{M \times N}$, donde $M = N = GDL * n$, donde (GDL: grados de libertad del elemento, n: número de elementos). Posteriormente se suma todas las matrices calculadas para cada

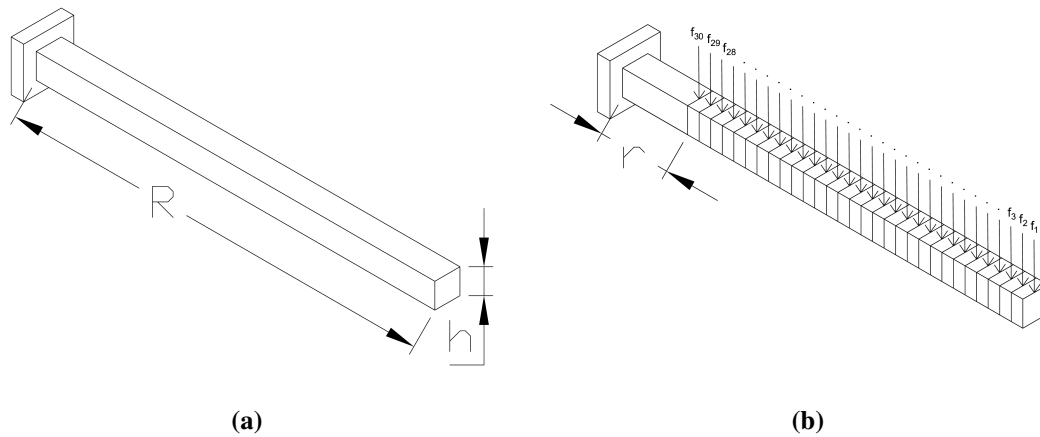


Figura 3.7: a) Viga en voladizo. b) Discretización de la viga en elementos finitos.

elemento obteniéndose la matriz global del sistema K , se realiza un procedimiento similar para determinar el vector de fuerza global f como se muestra en (3.5). Finalmente se resuelve la ecuación que rige el comportamiento estático de una viga $Kd = f$.

Donde:

$$K = \sum_{e=1}^n k^{(e)} \quad y \quad f = \sum_{e=1}^n f^{(e)}$$

La deflexión máxima obtenida en el extremo libre de la viga fue $d_{30y} = -0.001012m$. Posteriormente se determina la deflexión de la viga sometida a la carga en cuestión en un software comercial y se obtienen una deflexión máxima en el el extremo libre de la viga de 0.00122, los resultados se muestran en la figura 3.8.

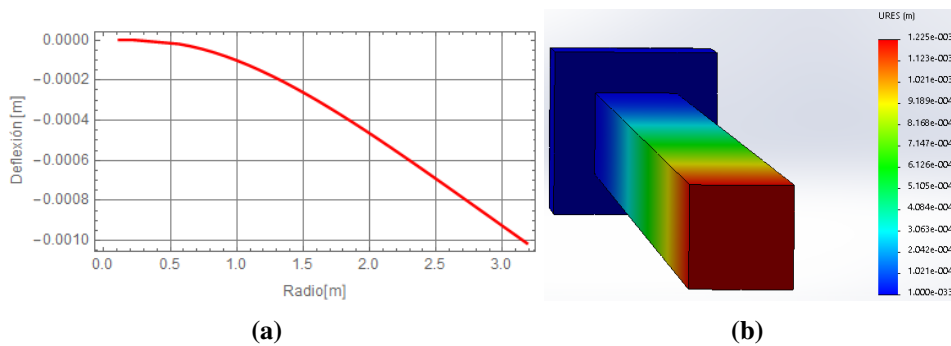


Figura 3.8: a) Deflexión de la viga calculado. b) Validación de la deflexión de la viga en un software comercial.

3.6 Determinación de las deflexiones del álabe aplicando cargas aerodinámicas

Se analiza el álabe diseñado el cual se somete a la carga aerodinámica más relevante determinado en el capítulo 2, el cual corresponde a la velocidad nominal. Se asume que la viga es inicialmente rígida y tiene longitud R . Se considera que el álabe presenta sección transversal, torsión y rigidez variable a lo largo de su eje longitudinal, las cuales fueron definidas en el capítulo II, las propiedades mecánicas (EIx, EIy, GA) de cada sección se determinan empleando un software comercial, cuales se presentan en el anexo B.

Formulación del problema

Se discretiza el álabe en 30 secciones, se considera a cada sección como elementos finitos de viga. Cada elemento tiene una longitud r y presenta una sección transversal y rigidez constante a lo largo del elemento finito de viga. Los desplazamientos y rotaciones se describen en el sistema referencia (x, y, z) . El origen O esta ubicado en el extremo izquierdo de la viga y se sitúa en la línea que pasa por el centro cortante de la sección transversal de la viga como se observa en la figura 3.9.

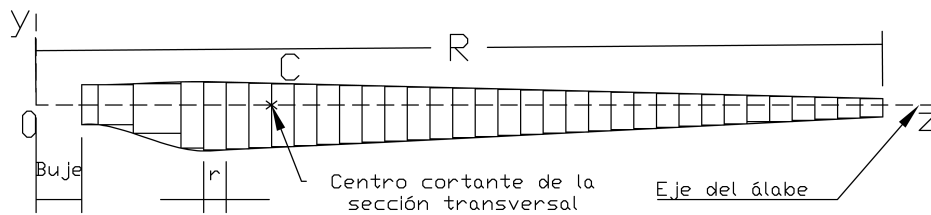


Figura 3.9: Formulación de la viga mediante elementos finitos.

Se somete la viga a cargas puntuales nodales correspondientes al caso II del capítulo 2. Dado que la viga está sometida a cargas transversales se emplea la matriz de rigidez de un elemento finito de viga para deformaciones transversales descrita por (3.65). Se realiza una formulación de la viga mediante elementos finitos unidimensionales de viga aplicando (3.66) y se resuelve $Kd = f$ para d .

$$K = \sum_{e=1}^n K^{(e)} \quad y \quad f = \sum_{e=1}^n f^{(e)} \tag{3.66}$$

Como resultado se obtuvo que la deformación máxima calculada fue de $0.0135m$, posteriormente se obtiene las deflexiones en el software comercial donde se obtuvo una deflexión de $0.0145m$ como se observa en la figura 3.10, se obtuvo un error porcentual de 0.08%

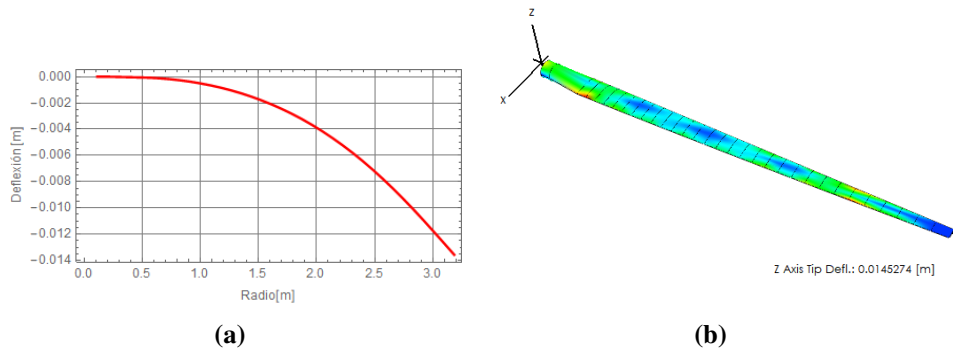


Figura 3.10: a) Deformación del álabe calculado. b) Validación de la deflexión del álabe en un software.

3.7 Conclusiones

En este capítulo se presentó y se aplicó la teoría correspondiente a los elementos finitos unidimensionales para determinar las deflexiones en vigas considerando la teoría de vigas de Timoshenko. Para corroborar dicha teoría se empleó un ejemplo estándar correspondiente a una viga empotrada libre con una carga distribuida sobre dicho elemento, obteniéndose resultados satisfactorios con respecto a los resultados determinados a través del software comercial. Posteriormente se aplicó en el álabe de estudio, donde los resultados obtenidos fueron aceptables con respecto a lo determinado con el software comercial.

Modelado cinemático del aerogenerador

4.1 Introducción

La importancia del modelado cinemático no puede entenderse sin hacer una breve descripción del modelado dinámico de un cuerpo, la dinámica estudia los cuerpos en movimiento y causas que lo producen, por lo tanto, para evitar contratiempos durante el estudio de la dinámica, es deseable primeramente una función vectorial que permita describir tal movimiento, el cual es campo de estudio de la cinemática.

El análisis cinemático puede abordarse desde dos enfoques, el enfoque de cinemática directa y el de la cinemática inversa, dependiendo de las variables conocidas del problema. El problema cinemático directo consiste en determinar la posición de las juntas articulares dado los parámetros y desplazamientos relativos de las articulaciones, así como sus derivadas primera y segunda con respecto al tiempo [24]. El problema cinemático inverso para cadenas cinemáticas compuestas consiste en determinar los valores de las variables que definen los pares inferiores que integran al sistema articulado y su variación con el tiempo dado las trayectorias de posición, velocidad y aceleración de cada uno de sus eslabones.

En este capítulo se realiza el modelado cinemático directo del aerogenerador, se halla la función angular vectorial que permite describir la posición de un elemento del álabe, así como sus derivadas primera y segunda con respecto al tiempo. Después, se determina la velocidad angular del rotor eólico y góndola considerando condiciones reales de operación de los aerogeneradores, posteriormente, multiplicando la función vectorial de posición y la función vectorial de velocidad angular de determina la función vectorial de velocidad lineal de un elemento del álabe en función de la velocidad del viento, finalmente se presenta un análisis de velocidad y aceleración lineal de la punta del álabe a diferentes casos de operación.

4.2 Determinación de modelos cinemáticos de posición, velocidad y aceleración lineal

Determinación del modelo cinemático de posición

Para determinar el modelo cinemático de posición se utiliza en enfoque de la cinemática directa de posición el cual consiste en encontrar la función vectorial $\mathbf{u}_v \in \mathbb{R}^3$ dada la función vectorial de posición $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$ en las juntas articulares. Se utiliza el método de Denavit-Hartenberg (D-H) descrito en el apéndice C, primeramente se asignan marcos de referencia a cada junta articular, empezando por la base de la torre (X_1, Y_1, Z_1), centro de masa de la góndola (X_2, Y_2, Z_2), centro del rotor (X_3, Y_3, Z_3) eólico y centro de masa del álabes (X_4, Y_4, Z_4), como se observa en la figura 4.1. Se considera que el rotor gira en el sentido de las manecillas del reloj en una vista frontal, se considera a los elementos articulados que van desde la base de la torre hasta el centro de masa del álabes como una cadena cinemática abierta.

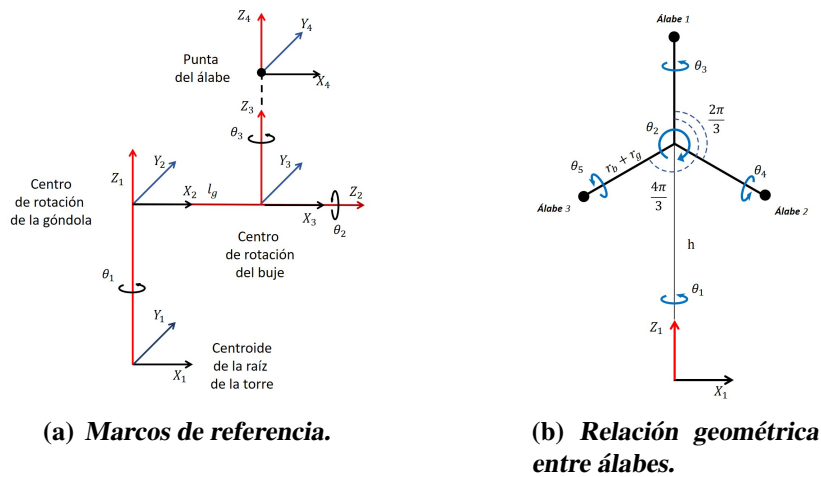


Figura 4.1: Asignación de marcos de referencia en las juntas articulares del aerogenerador.

Una vez definido los marcos de referencia y la relación que existe entre álabes se identifican los parámetros D-H, siguiendo la metodología del apéndice C, para cada uno de los álabes, las cuales se muestran en la tabla 4.1.

Tabla 4.1: Tabla de parámetros y variables.

i	d_i	α_i	b_i	θ_i
1	0	$\pi/2$	h	$\theta_1 + \pi$
2	0	$\pi/2$	lg	θ_2
Álabes 1	3-4	0	$r_b + l_a$	θ_3
Álabes 2	3-5	0	$r_b + l_a$	$\theta_4 + 2\pi/3$
Álabes 3	3-6	0	$r_b + l_a$	$\theta_5 + 4\pi/3$

Donde,
 h : es la altura de la torre

lg : es la longitud de la góndola
 r_b : es el radio del eje del rotor a la raíz del álabe
 l_a : es la longitud de la raíz del álabe a la punta.

Sustituyendo los parámetros y variables de la tabla 4.1 en las ecuaciones (C.1) y (C.5), se obtienen los vectores de traslación y las matrices de rotación

$$[\mathbf{a}_{1,2}]_1 = \mathbf{a}_1 = [0, 0, h]^T \quad (4.1)$$

$$[\mathbf{Q}_{1,2}]_1 = \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} -c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 \\ -s\theta_1 & 0 & c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$[\mathbf{a}_{2,3}]_2 = \mathbf{a}_2 = [0, 0, lg]^T \quad (4.3)$$

$$[\mathbf{Q}_{2,3}]_2 = \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & -s\theta_2 \\ s\theta_2 & 0 & c\theta_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$[\mathbf{Q}_{3,4}]_3 = \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Por lo tanto la función vectorial que parte de la base inercial al OT (centro de masa álabe) es:

$$\mathbf{u}_v = \mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{a}_3 \quad (4.6)$$

$$\mathbf{u}_v = \begin{bmatrix} -lg \sin(\theta_1) - (l_a + r_b) \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ lg \cos(\theta_1) - (l_a + r_b) \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ h - (l_a + r_b) \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

El vector de posición \mathbf{u} obtenido (4.7) depende de θ_1 y θ_2 que corresponden a la posición angular de la góndola y posición angular del rotor eólico respectivamente.

Con la finalidad de simplificar operaciones y además tener funciones vectoriales que describan a cada junta articular se realiza una recursión progresiva, dicho método consiste en partir de la base inercial e ir describiendo la posición de cada junta articular posterior en términos de la junta articular anterior, referidas a la base inercial.

Recursión progresiva para rotaciones, para la base inercial X_1, Y_1, Z_1

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_1 \quad (4.8)$$

Para la base X_2, Y_2, Z_2 y base X_3, Y_3, Z_3 son (4.9) y (4.10) respectivamente

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 \mathbf{Q}_2 \quad (4.9)$$

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 \mathbf{Q}_3 \quad (4.10)$$

Por lo tanto la cerradura para la rotación resulta en (4.11)

$$[Q_{1,3}]_1 = [Q_{1,2}]_1 [Q_{2,3}]_2 [Q_{3,4}]_3 = P_3 = Q_1 Q_2 Q_3 \quad (4.11)$$

Recursión progresiva para traslaciones: Para la base inercial X_3, Y_3, Z_3

$$s_3 = a_3 \quad (4.12)$$

Para base X_2, Y_2, Z_2

$$s_2 = a_2 + Q_2 s_3 \quad (4.13)$$

Para base X_1, Y_1, Z_1

$$s_1 = a_1 + Q_1 s_2 \quad (4.14)$$

Se realiza la representación gráfica del vector de posición u_v , (4.7), en un software comercial, los datos de entrada fueron $h = 10$, $l_g = 0.5$, $r_b = 0.18$, $l_a = 3$.

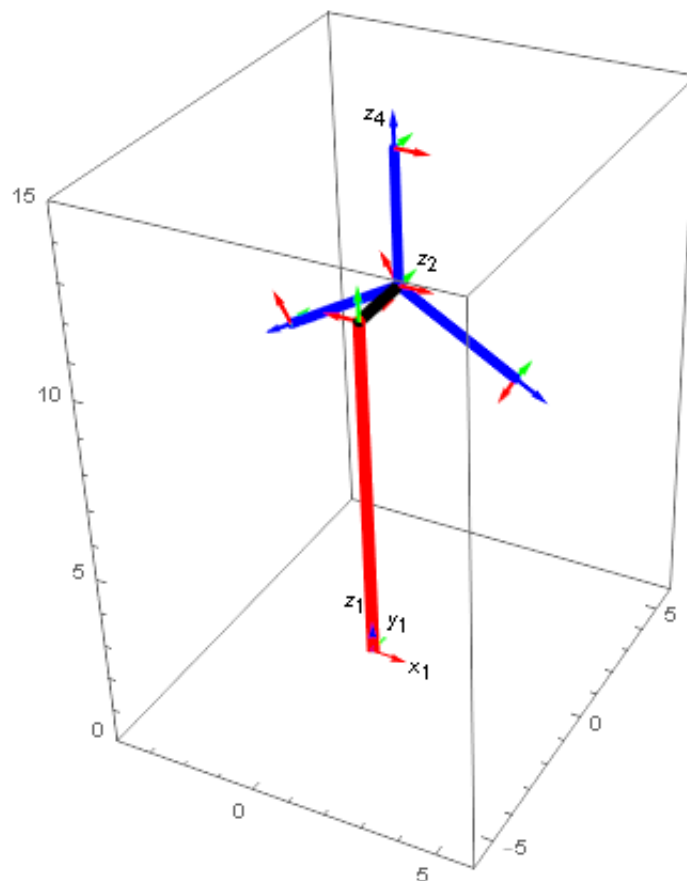


Figura 4.2: Representación gráfica del aerogenerador.

Se realiza la simulación gráfica del vector de posición u_v haciendo variar la posición angular de la góndola θ_1 para valores de $0, \pi/2, \pi, 3/4\pi$ mientras la posición angular del rotor θ_2 se mantiene constante, los resultados se muestran en la figura 4.3 donde se puede observar que la variación de θ_1 en efecto representa el giro de la góndola.

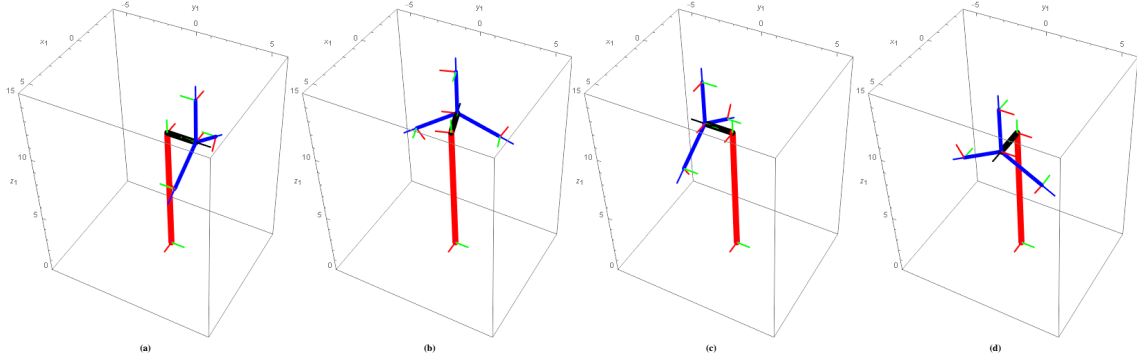


Figura 4.3: Representación gráfica de la variación de la góndola, θ_1 .

Se realiza la simulación del rotor eólico haciendo variar θ_2 para valores de $0, \pi/2, \pi$ y $3/4\pi$ mientras θ_1 se mantiene constante, se observa la variación de θ_2 en efecto representa el giro del rotor en el sentido de las manecillas del reloj (ver figura 4.4), por tanto se concluye que el vector u_v modela la cinemática deseada del aerogenerador.

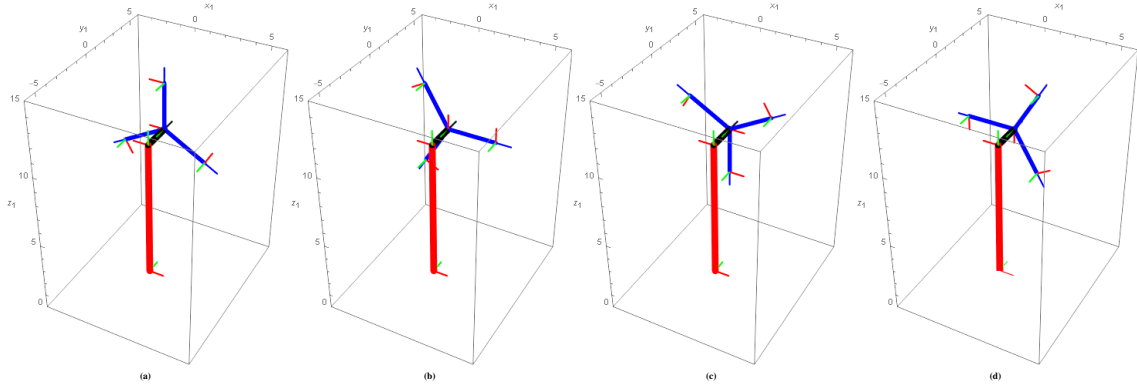


Figura 4.4: Representación gráfica de la variación del rotor eólico, θ_2 .

Determinación de los modelos de velocidad y aceleración lineal

El problema cinemático directo de velocidad consiste en encontrar la función vectorial $\dot{u}_v \in \mathbb{R}^3$ dada la función vectorial de posición θ y velocidad $\dot{\theta} \in \mathbb{R}^3$ en las juntas articulares. Derivando con respecto al tiempo a (4.7) se obtiene

$$\dot{u}_v = \dot{a}_1 + \dot{Q}_1 a_2 + Q_1 \dot{a}_2 + \dot{Q}_1 Q_2 a_3 + Q_1 \dot{Q}_2 a_3 + Q_1 Q_2 \dot{a}_3 \quad (4.15)$$

$$\dot{u}_v = \left[\frac{\partial a_1}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 a_2 + Q_1 \frac{\partial a_2}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 Q_2 a_3 + Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 a_3 + Q_1 Q_2 \frac{\partial a_3}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_3 \right] \quad (4.16)$$

$$\dot{u}_v = \left[\frac{\partial a_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_1} a_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_1} Q_2 a_3, Q_1 \frac{\partial a_2}{\partial \theta_2} + Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial \theta_2} a_3, Q_1 Q_2 \frac{\partial a_3}{\partial \theta_3} \right] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Las derivadas parciales pueden representarse de la siguiente forma. Por definición del método de Denavit-Hartenberg, \mathbf{a}_2 se obtiene de la siguiente manera:

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix} + \mathbf{Q}_2 \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 c\theta_2 \\ x_3 s\theta_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Derivando a \mathbf{a}_2 respecto a θ_2

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial \theta_2} \begin{Bmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dado que \mathbf{Q}_2 es una matriz ortonormal, entonces $\mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}$, donde \mathbf{I} es la matriz identidad. Por lo que

$$\frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial \theta_2} \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_2 \begin{Bmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Además

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial \theta_2} \mathbf{Q}_2^T = \begin{bmatrix} -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 \\ c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A dicha matriz se le denotará como

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz \mathbf{E} es la matriz antisimétrica cuya rotación es el eje z .

Suponiendo que $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$ y $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]^T$, entonces;

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times) \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

si el vector $\mathbf{e} = [0, 0, 1]^T$, entonces;

$$(\mathbf{e} \times) = \mathbf{E}$$

Por lo que

$$\frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial \theta_2} = (\mathbf{e} \times) \mathbf{a}_2$$

En general, las derivadas parciales de las funciones vectoriales pueden determinarse aplicando el producto vectorial entre el vector axial $(\mathbf{e} \times)$ y la función vectorial.

Por lo tanto (4.17) puede determinarse de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{u}}_v = [\mathbf{e} \times \mathbf{s}_1 \quad \mathbf{P}_1(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_2) \quad \mathbf{P}_2(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_3)] \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_v = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.20)$$

Donde \mathbf{J} es conocida como la matriz Jacobiana y $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ es la función vectorial de velocidad angular.

$$\dot{\mathbf{u}}_v = \begin{Bmatrix} 3.683 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) - 2 \cos(\theta_1) - 3.683 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \\ 3.683 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1) - 2 \sin(\theta_1) + 3.683 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \\ -3.683 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

Derivando con respecto al tiempo a la ecuación (4.20), se obtiene la función vectorial de aceleración lineal, esto es

$$\ddot{\mathbf{u}}_v = \mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.22)$$

Donde $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ es el vector de aceleración angular, $\dot{\mathbf{J}}$ es la derivada con respecto al tiempo de \mathbf{J} , la cual es equivalente a

$$\dot{\mathbf{J}} = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

Haciendo uso del vector axial, la derivada parcial de dicha matriz se puede determinar como

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{s}_1) & \mathbf{e} \times \mathbf{P}_1(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_2) & \mathbf{e} \times \mathbf{P}_2(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_3) \\ \mathbf{e} \times \mathbf{P}_1(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_2) & \mathbf{e} \times \mathbf{P}_1(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_2) & \mathbf{e} \times \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_3) \\ \mathbf{e} \times \mathbf{P}_2(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_3) & \mathbf{e} \times \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_3) & \mathbf{e} \times \mathbf{P}_2(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_3) \end{bmatrix}$$

$\dot{\mathbf{J}}$ es conocida como la matriz Hessiana.

Sustituyendo datos de entradas dados anteriormente, tenemos

$$\ddot{\mathbf{u}}_v = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_z \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Donde

$$\begin{aligned} \ddot{u}_x = & 23.683 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_1 (-3.683 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) - 2 \cos(\theta_1)) + 2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1) \\ & - 3.683 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) - 7.366 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - 3.683 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) \end{aligned}$$

$$\ddot{u}_y = \ddot{\theta}_1 [3.68 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) - 2 \sin(\theta_1)] + 3.68 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - 3.68 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) - 3.68 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) - 2 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1) + 7.36 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2)$$

$$\ddot{u}_z = -3.683 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - 3.683 \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_2)$$

4.3 Determinación de la trayectoria del espacio articular del rotor

Se determina la función que describe la trayectoria de una junta articular a manera de ejemplo por su simplicidad, dicha junta articular describe una trayectoria lineal (ver figura 4.5) y posteriormente se aplica el mismo procedimiento para determinar la función de la trayectoria articular de la góndola y rotor del aerogenerador.

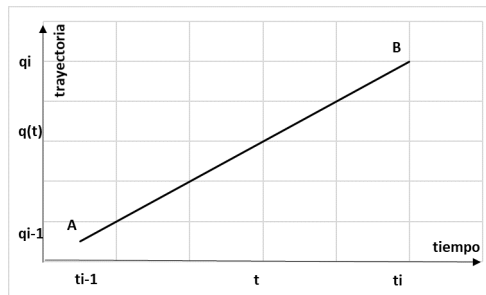


Figura 4.5: Trayectoria de la función de posición de la junta articular.

Dado el desplazamiento y el tiempo inicial de una determinada junta articular (q_{i-1} , t_{i-1}) y el desplazamiento y tiempo final (q_i , t_i) de dicha junta, se determina el desplazamiento de dicha junta articular como una función del tiempo $q(t)$, $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$ satisfaciendo las restricciones de inicio y final de recorrido. Se propone una función lineal para tal caso

$$P(t) = a_0 + a_1 t$$

Imponiendo condiciones iniciales y finales de recorrido, se hallan dos ecuaciones con dos incógnitas. Después, resolviendo simultáneamente el sistema de ecuaciones se halla las incógnitas a_0 y a_1 .

$$\underbrace{\begin{matrix} P(t_{i-1}) = q_{i-1} \\ P(t_i) = q_i \end{matrix}}_{\text{Condiciones, inicial y final.}} \quad \underbrace{\begin{matrix} q_{i-1} = a_0 + a_1(t_{i-1}) \\ q_i = a_0 + a_1(t_i) \end{matrix}}_{\text{Sistema de ecuaciones}} \quad \underbrace{\begin{matrix} a_0 = q_{i-1} - a_1(t_{i-1}) \\ a_1 = \frac{q_i - q_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \end{matrix}}_{\text{Valores de } a_0 \text{ y } a_1}$$

Sustituyendo a_0 y a_1 en la función lineal propuesta, se halla la función que describe la trayectoria articular deseada que satisface condiciones de inicio y final de recorrido.

$$P(t) = \underbrace{q_{i-1} + (q_i - q_{i-1})}_{\text{lugar geométrico}} \cdot \underbrace{\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right)}_{\text{perfil de trayectoria}}$$

Se puede observar que la función $P(t)$ depende de t , donde el término $t \in [0, 1]$, $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$, es decir que dicha función se puede generar de forma exclusiva a través de una función independiente del tiempo, la cual se le conoce como perfil de trayectoria, y una función que contiene las posiciones de las juntas articulares al cual se le conoce con el nombre de lugar geométrico.

4.3.1 Determinación de las funciones de trayectoria de la góndola

Antes de modelar las trayectorias del espacio articular de la góndola se debe conocer la forma de operación, se sabe que el giro de la góndola permite reorientar el rotor de tal forma que pueda captar la máxima cantidad de energía posible y también para evitar vibraciones excesivas, este giro se da principalmente cuando hay cambios significativos en la dirección predominante del viento. Mediante un sensor de dirección de viento se mide la orientación de la góndola respecto a la dirección del viento predominante durante un lapso de tiempo determinado, esto es debido a que el viento cambia de dirección de forma aleatoria y no es factible que la góndola cambie de dirección en tiempo real, si la desorientación de la góndola es mayor a un valor establecido, entonces el mecanismo de orientación de la góndola ejecuta la reorientación.

Dicho lo anterior, se sabe que antes de iniciar el giro de orientación la góndola está en reposo, por tanto la velocidad y aceleración angular deben ser cero, y por otro lado al término de la orientación es conveniente también que la velocidad y aceleración angular sean cero, para evitar sobresaltos.

Dado las condiciones anteriores, se propone un polinomio de séptimo grado para describir la posición de la trayectoria articular, esto con la finalidad de poder controlar la posición, velocidad y aceleración de la góndola durante el giro, se obtiene las derivadas primera y segunda de dicho polinomio para hallar los modelos de velocidad y aceleración respectivamente

$$\begin{aligned} P(t) &= a_7 t^7 + a_6 t^6 + a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \\ \dot{P}(t) &= 7a_7 t^6 + 6a_6 t^5 + 5a_5 t^4 + 4a_4 t^3 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1 \\ \ddot{P}(t) &= 42a_7 t^5 + 30a_6 t^4 + 20a_5 t^3 + 12a_4 t^2 + 6a_3 t + 2a_2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Imponiendo condiciones iniciales, intermedias y finales en (4.24), se determinan ocho

ecuaciones lineales con ocho incógnitas,

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{\begin{array}{l} P(0) = 0 \\ \dot{P}(0) = 0 \\ \ddot{P}(0) = 0 \end{array}}_{\text{Condiciones iniciales}} & \underbrace{\begin{array}{l} P(t_f/2) = \frac{1}{2} \\ \dot{P}(t_f/2) = \omega_{max} \end{array}}_{\text{Condiciones intermedias}} & \underbrace{\begin{array}{l} P(t_f) = 1 \\ \dot{P}(t_f) = 0 \\ \ddot{P}(t_f) = 0 \end{array}}_{\text{Condiciones finales}}
 \end{array} \quad (4.25)$$

Se aplican las condiciones (4.25) a (4.24) obteniéndose ocho ecuaciones con ocho incógnitas, posteriormente resolviendo tales ecuaciones se hallan las incógnitas a_0, a_1, \dots, a_7 .

$$\begin{array}{l}
 a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{32(\omega_{max}t_f - 2.1875)}{t_f^3}, \quad a_4 = \frac{160(\omega_{max}t_f - 1.96875)}{t_f^4} \\
 a_5 = -\frac{288(\omega_{max}t_f - 1.89583)}{t_f^5}, \quad a_6 = \frac{224(\omega_{max}t_f - 1.875)}{t_f^6}, \quad a_7 = -\frac{64(\omega_{max}t_f - 1.875)}{t_f^7}
 \end{array} \quad (4.26)$$

Sustituyendo las incógnitas halladas en la expresión (4.24), se obtienen finalmente perfiles de trayectoria de la góndola.

$$\begin{aligned}
 P(t) = & \\
 & - \frac{64t^7 (t_f\omega_{m\acute{a}x} - 1.875)}{t_f^7} + \frac{224t^6 (t_f\omega_{m\acute{a}x} - 1.875)}{t_f^6} - \frac{288t^5 (t_f\omega_{m\acute{a}x} - 1.89583)}{t_f^5} \\
 & + \frac{160t^4 (t_f\omega_{m\acute{a}x} - 1.96875)}{t_f^4} + \frac{32t^3 (t_f\omega_{m\acute{a}x} - 2.1875)}{t_f^3}
 \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{P}(t) = & \\
 & - \frac{448t^6 (t_f\omega_{m\acute{a}x} - 1.875)}{t_f^7} + \frac{1344t^5 (t_f\omega_{m\acute{a}x} - 1.875)}{t_f^6} - \frac{1440t^4 (t_f\omega_{m\acute{a}x} - 1.89583)}{t_f^5} \\
 & + \frac{640t^3 (t_f\omega_{m\acute{a}x} - 1.96875)}{t_f^4} - \frac{96t^2 (t_f\omega_{m\acute{a}x} - 2.1875)}{t_f^3}
 \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{P}(t) = & \\
 & - \frac{2688t^5 (t_f\omega_{m\acute{a}x} - 1.875)}{t_f^7} + \frac{6720t^4 (t_f\omega_{m\acute{a}x} - 1.875)}{t_f^6} - \frac{5760t^3 (t_f\omega_{m\acute{a}x} - 1.89583)}{t_f^5} \\
 & + \frac{1920t^2 (t_f\omega_{m\acute{a}x} - 1.96875)}{t_f^4} - \frac{192t (t_f\omega_{m\acute{a}x} - 2.1875)}{t_f^3}
 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Donde t es el tiempo, t_f es el tiempo que tarda el giro en pasar de una posición angular inicial a una posición angular final, $\omega_{m\acute{a}x}$ es un parametro que permite controlar la velocidad angular máxima es cual esta dada por $\omega_{m\acute{a}x} = c * (1/t)$, donde c , es un parámetro adimensional que permite controlar los perfiles de trayectoria, el cual varía de 1.875–2.1875.

Una vez determinado el perfil de trayectoria se acopla al lugar geométrico de la tra-

yectoria para determinar las funciones que describen la posición, velocidad y aceleración lineal de la trayectoria articular.

$$\theta_1 = \theta_{11} + \Delta\theta P(t) \quad (4.30)$$

$$\dot{\theta}_1 = \Delta\theta \dot{P}(t) \quad (4.31)$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\Delta\theta \ddot{P}(t) \quad (4.32)$$

Donde $\Delta\theta = \theta_{12} - \theta_{11}$

θ_{11}, θ_{12} : Son la posición angular inicial y final respectivamente.

Caso de estudio

Se simula el caso en el que la góndola está ubicada a $\theta_{11} = 70^\circ$ respecto a un marco de referencia y experimenta una desalineación angular respecto a la dirección predominante de viento de 20° , $\theta_{12} = 90^\circ$ y la góndola se orienta en un tiempo de 10 segundos. Se considera que la góndola parte de reposo con velocidad y aceleración cero, y al final del recorrido las velocidades y aceleraciones son igualmente cero. Por tanto se sustituyen los datos en las funciones que describen las trayectorias articulares, además se elige $c = 1.875$, los resultados obtenidos se en la figura siguiente.

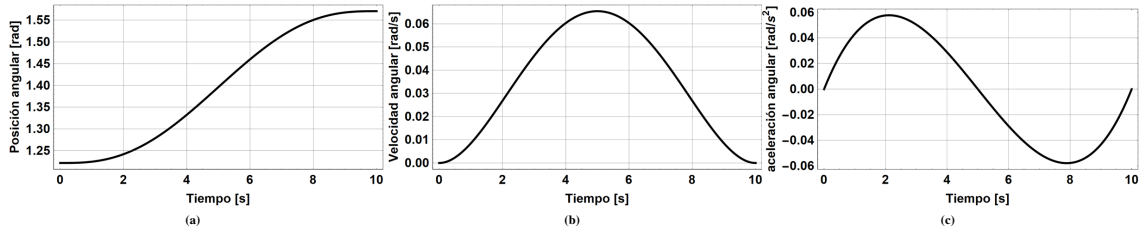


Figura 4.6: Trayectoria de la junta articular de la góndola.

En la figura 4.6a se muestra el comportamiento de la posición angular de la góndola, el cual inicia en 1.22 radianes, (70°), y termina en 1.57075 radianes, (90°), lo cual cumple las condiciones propuestas. En la figura 4.6b se observa el comportamiento de la velocidad angular respecto al tiempo, se observa que inicia con velocidad angular cero, posteriormente alcanza su máximo valor de velocidad angular a la mitad del recorrido de orientación y al final del recorrido tiene velocidad angular igual a cero, lo cual es un comportamiento deseado. En la figura 4.6c se observa el comportamiento de la aceleración angular, se observa que al inicio y al final del recorrido se tiene aceleración cero, lo cual cumple con las condiciones establecidas.

4.3.2 Determinación de la función de trayectoria del rotor eólico

Para determinar la función de velocidad angular del rotor se considera el funcionamiento real de los aerogeneradores, el cual se puede dividir en tres fases. En la fase *I* el rotor de la turbina eólica está en reposo debido a que la potencia del viento no es suficiente para vencer la fricción e inercia del aerogenerador, el límite superior de esta fase es la

velocidad de arranque U_i .

En la fase *II*, también conocida como zona de operación normal, la potencia del viento no es suficiente para producir potencia nominal. En esta fase se busca extraer la máxima potencia posible mediante una estrategia de control, por ejemplo, el seguimiento del punto de potencia máximo, el rango de operación de esta fase va de velocidad inicial U_i a velocidad nominal U_{nom} . Típicamente los aerogeneradores de control emplean dicha estrategia de control, el cual consiste en operar en el coeficiente de potencia óptimo $C_{p_{max}}$. El $C_{p_{max}}$ se alcanza a la velocidad específica de diseño λ_{dise} , para operar a $C_{p_{max}}$ primero se obtiene la velocidad del viento mediante un sensor y después se controla la velocidad angular del rotor eólico vía el torque electromagnético, de tal forma que la relación entre la velocidad angular y la velocidad de viento U sea tal que $\lambda = \lambda_{opt}$. Como $\omega = \frac{\lambda_{opt} U}{R}$ y dado que λ_{opt} y R son constantes, entonces la velocidad angular óptimo del rotor eólico es directamente proporcional a la velocidad del viento. Con dicho comportamiento se garantiza que a cualquier velocidad de viento dentro esta zona se estará operando a $C_{p_{max}}$.

Finalmente la fase *III*, esta comprendido desde U_{nom} hasta la velocidad de corte U_f . Cuando el rotor experimenta U_{nom} el generador empieza a producir potencia nominal, a medida que la velocidad del viento incrementa la producción de potencia también lo hace por que se da el caso en que el generador eléctrico falle por tanto la producción de potencia debe reducirse cercano a su valor nominal mediante sistemas de control dando como resultado una velocidad angular constante como se observa en la figura 4.7.

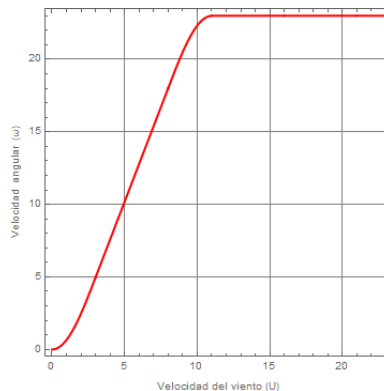


Figura 4.7: Comportamiento típico de la velocidad angular en función de la velocidad del viento.

Determinación de las trayectorias del espacio articular del rotor eólico

Una vez conocido el comportamiento típico de la velocidad angular del rotor eólico (ver figura 4.7) son deseables modelos matemáticos que describan tal comportamiento, en este trabajo se hallan trayectorias para describir la velocidad angular del rotor eólico antes descrita de tal forma que satisfaga condiciones de posición angular y además que la trayectorias de aceleración angular tengan un comportamiento suave. Se propone un perfil de aceleración media sinusoidal (4.35), posteriormente se halla la trayectoria para velocidad y posición mediante la integral primera y segunda respectivamente.

$$\ddot{\theta}_2 = A \sin \frac{\pi u}{\Delta u} \quad (4.33)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{A}{\pi} \Delta u \cos\left(\frac{\pi u}{\Delta u}\right) + k_1 \quad (4.34)$$

$$\theta_2 = -\frac{A}{\pi^2} (\Delta u)^2 \sin\left(\frac{\pi u}{\Delta u}\right) + k_1 u + k_2 \quad (4.35)$$

Imponiendo condiciones iniciales y finales, tenemos

$$\theta_2(u_1) = \theta_1, \quad \dot{\theta}_2(u_1) = \omega_1, \quad \dot{\theta}_2(u_2) = \omega_2 \quad (4.36)$$

Resulta en un sistema de ecuaciones, resolviendo dicho sistema de ecuaciones se determina las incógnitas A , k_1 , k_2 , por tanto tenemos

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\pi \Delta \omega \sin\left(\frac{\pi u}{\Delta u}\right)}{\Delta u \left[\cos\left(\frac{\pi u_2}{\Delta u}\right) - \cos\left(\frac{\pi u_1}{\Delta u}\right) \right]} \quad (4.37)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{-\Delta \omega \cos\left(\frac{\pi u}{\Delta u}\right) + \omega_2 \cos\left(\frac{\pi u_1}{\Delta u}\right) - \omega_1 \cos\left(\frac{\pi u_2}{\Delta u}\right)}{\cos\left(\frac{\pi u_1}{\Delta u}\right) - \cos\left(\frac{\pi u_2}{\Delta u}\right)} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 = & \frac{1}{\pi \left[\cos\left(\frac{\pi u_1}{\Delta u}\right) - \cos\left(\frac{\pi u_2}{\Delta u}\right) \right]} \cdot \left[-\Delta u \Delta \omega \sin\left(\frac{\pi u}{\Delta u}\right) + \pi \cos\left(\frac{\pi u_1}{\Delta u}\right) [\theta_1 + \omega_2(u - u_1)] \right. \\ & \left. - \pi \cos\left(\frac{\pi u_2}{\Delta u}\right) [\theta_1 + u\omega_1 - u_1\omega_1] + \Delta u \Delta \omega \sin\left(\frac{\pi u_1}{\Delta u}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

Donde $\Delta u = u_2 - u_1$ y $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$

Caso de estudio

La velocidad angular es determinada por el control del punto de potencia máximo y está definida mediante $\omega = \frac{\lambda}{R}u$, por otro lado la velocidad del viento es aleatorio e impredecible. Para determinar la velocidad angular se hace uso de la velocidad del viento promedio en un lapsos de tiempo determinado, durante dicho lapsos de tiempo el rotor operará a velocidad angular constante. Una vez determinada la nueva velocidad promedio el rotor se ajustara a la nueva velocidad angular determinada por el control de seguimiento de punto de potencia máximo. Cuando la velocidad angular es constante su aceleración es cero, por tanto, es conveniente que al inicio y final del cambio de velocidad la aceleración sea cero.

Se analiza el caso en el que el aerogenerador experimenta un cambio de velocidad de 0 m/s a 11.2 m/s y posteriormente se analiza el caso cuando el aerogenerador experimenta un cambio de velocidad de viento de 10 m/s a 11 m/s . En el primer caso el aerogenerador parte de reposo, por tanto la posición, velocidad y aceleración angular son $\theta_1 = 0$, $\dot{\theta}_1 = 0$ y $\ddot{\theta}_1 = 0$, después, se sabe que la velocidad angular del aerogenerador esta determinada por el control de seguimiento de potencia máximo $\omega = \frac{\lambda}{R}u$, por tanto la velocidad angular final es $\omega_2 = \frac{\lambda}{R}.u_f$, por otro, lado la aceleración final convenientemente debe ser cero, esto para evitar sobresaltos.

Se sustituyen los datos de entrada en $u_1 = 0$, $u_2 = 11.2 \text{ m/s}$, $\theta_1 = 0$, $\lambda = 6.7$, $R = 3.189 \text{ m}$ $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 22.3 \text{ rad/s}$, en (4.37),(4.38), (4.39) y se determina la posición, velocidad y aceleración angular del rotor los cuales se observan en la figura 4.8

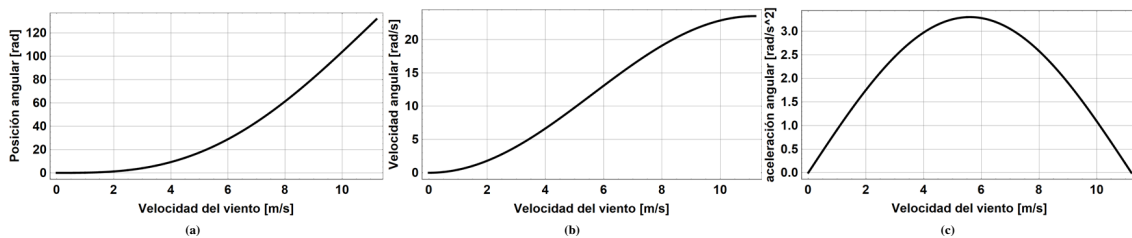


Figura 4.8: Trayectorias angulares del rotor eólico.

En la figura 4.8 se observa que tanto la posición, velocidad y aceleración angular cumplen las condiciones impuestas, además se observa que la aceleración tiene un comportamiento suave.

En un segundo caso de estudio se simula el caso cuando el rotor opera a 10 m/s de forma constante y experimenta un cambio de velocidad de viento a 11.2 m/s . Se sustituyen los datos de entrada $u_1 = 10 \text{ m/s}$, $u_2 = 11.2 \text{ m/s}$, $\theta_1 = 0$, $\lambda = 6.7$, $R = 3.189 \text{ m}$, en las expresiones de posición, velocidad y aceleración de la trayectoria articular del rotor eólico, los resultados se observan a continuación.

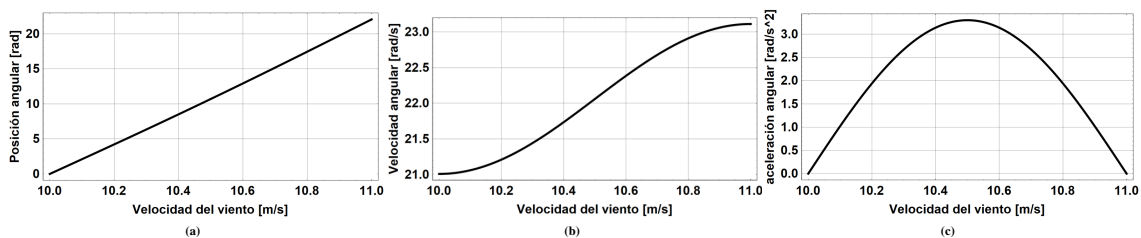


Figura 4.9: Trayectorias angulares del rotor eólico durante un cambio de velocidad del viento de 10 m/s a 11.2 m/s .

En la figura 4.8 y 4.9 se observa los comportamiento de la posición, velocidad y aceleración angular del rotor eólico, dado condiciones de operación de la trayectoria del espacio articular. Se observa también que se tiene control de la velocidad angular y aceleración máxima.

4.4 Determinación de la velocidad y aceleración de la punta del álabe

Se analiza el caso cuando el rotor experimenta un cambio de velocidad de viento de $u_1 = 10 \text{ m/s}$ a $u_2 = 11.2 \text{ m/s}$, por lo que el control de seguimiento del punto de potencia máximo ajustará la velocidad angular del rotor de $\omega_1 = 21 \text{ rad/s}$ a $\omega_2 = 23.3 \text{ rad/s}$ de forma suave, por otro lado, simultáneamente la góndola experimenta una desviación respecto a la dirección predominante del viento de 20° pasando de una posición $\theta_{21} = 70^\circ$ a 90° en un tiempo $t_f = 10 \text{ s}$ de forma suave .

Se determina la velocidad de la punta del álabe sustituyendo (4.31) y (4.38) en (4.21) (ver figura 4.10)a, finalmente se sustituye (4.32) y (4.37) en (4.23) para obtener la aceleración lineal de la punta del álabe el cual se observa en la figura 4.10b.

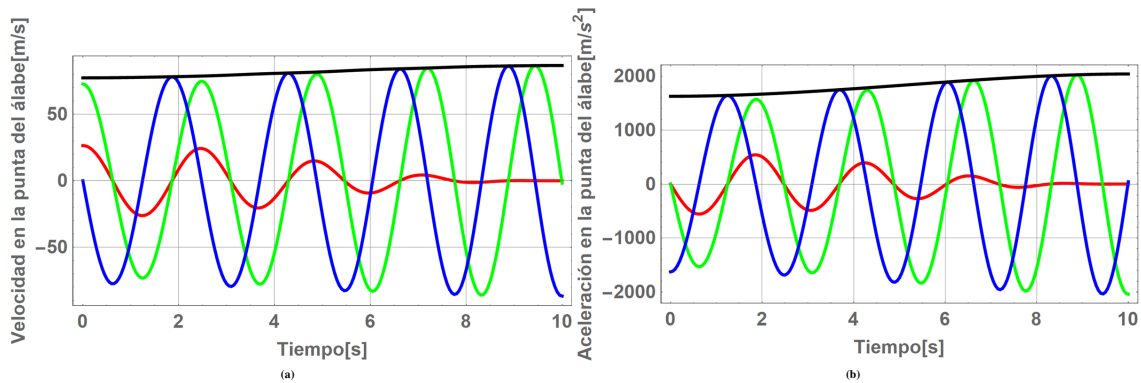


Figura 4.10: Velocidad y aceleración angular de la punta del álabe.

4.5 Conclusiones

En este capítulo se determinaron de forma sistemática los modelos cinemáticos para determinar la posición, velocidad y aceleración lineal de la punta del álabe o de cualquier otro punto de interés en el aerogenerador. Así mismo se planearon las trayectorias de posición, velocidad y aceleración en el espacio articular del mecanismo de reorientación del aerogenerador, de acuerdo a requerimientos de operación del aerogenerador. Tanto las trayectorias del espacio articular como los modelos cinemáticos fueron programados en un software comercial para su visualización y verificar la simulación de su funcionamiento.

Modelado dinámico del aerogenerador

5.1 Introducción

En este capítulo se determina el torque en la juntas articulares θ_1 y θ_2 requeridas para orientar la góndola y el rotor del aerogenerador con las velocidades y aceleraciones impuestas en el capítulo anterior, tal formulación se realiza mediante la dinámica de Euler-Lagrange. Además, se determinan los momentos inducidos en X_3, Y_3, Z_3 en la raíz del álabe debido a los movimientos simultáneos de la góndola y del rotor eólicos mediante las ecuaciones de dinámicas de Newton-Euler.

5.2 La dinámica de Euler-Lagrange

La ecuación de Euler-Lagrange para un sistema con n grados de libertad descrito por coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_n es [27]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_j} - \frac{\partial T}{\partial \theta_j} + \frac{\partial V}{\partial \theta_j} = f_j^*; j = 1, 2, \dots, n \quad (5.1)$$

Donde, T : Energía cinética total del sistema de cuerpo rígidos, correspondientes a los eslabones del manipulador.

V : Es la energía potencial total de los eslabones que conforman el sistema medidos desde la base inercial del sistema al centro de masa de cada uno de los eslabones.

f_j^* : Fuerza generalizada demandada en la j -ésima junta articular.

$\theta, \dot{\theta}$: Posición y velocidad de las juntas articulares.

Tomando $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ con el vector de coordenadas generalizadas, entonces (5.1) puede ser representada como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_j^*; j = 1, 2, \dots, n \quad (5.2)$$

5.2.1 Energía cinética

La expresión general para la energía cinética de i -ésimo cuerpo rígido con masa m_i que se mueve de tal forma que la velocidad de su centro de masa sea $\dot{\mathbf{r}}_i$ y su velocidad angular sea $\boldsymbol{\omega}_i$, está dada por [24], [28].

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (m_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i + \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \quad (5.3)$$

Donde:

$i : i = 1, 2, \dots, n$; donde n Es el número de eslabones móviles.

m : Es masa del i -ésimo eslabón.

\mathbf{r}_i : Vector de posición que parte de la base inercial al centro de masa del i -ésimo eslabón.

$\dot{\mathbf{r}}_i$: Velocidad lineal en el centro de masa del i -ésimo eslabón medido en la base inercial.

$\boldsymbol{\omega}_i$: Velocidad angular del i -ésimo eslabón medido en la base inercial.

\mathbf{I}_i : Matriz de inercia del i -ésimo eslabón medido en su centro de masa y referenciado a la base inercial.

Donde $\dot{\mathbf{r}}_i$ está dada por

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{J}_v \dot{\mathbf{q}}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.4)$$

El cual es equivalente a

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \underbrace{[\mathbf{e} \times \mathbf{s}_1 \quad \mathbf{P}_1(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_2) \quad \mathbf{P}_2(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_3) \quad \dots \quad \mathbf{P}_{i-1}(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_i)]}_{\mathbf{J}_v} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \vdots \\ \dot{q}_j \end{Bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} \quad (5.5)$$

Por otro lado $\boldsymbol{\omega}_i$, se define como

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{J}_{\omega_i} \dot{\mathbf{q}}_i \quad (5.6)$$

El cual es equivalente a

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{e}_1 \dot{q}_1 + \mathbf{e}_2 \dot{q}_2 + \dots + \mathbf{e}_n \dot{q}_n = \underbrace{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_i]}_{\mathbf{J}_{\omega_i}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{q}_j \end{Bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} \quad (5.7)$$

\mathbf{J}_{ω_i} se puede obtener a través de

$$\mathbf{J}_{\omega_i} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_i] \quad (5.8)$$

y e_i , son los vectores de rotación referidos a la base inercial,

$$[e_i]_1 = Q_1 Q_2, \dots, Q_n e = e_i \quad (5.9)$$

A su vez I es el momento de inercia referido a la base inercial, la cual es determinado a través del momento de inercia medido en el centro de masa, I_{ci} , esto es

$$I_i = P_i I_{ci} P_i^T \quad (5.10)$$

Por tanto empleando (5.4), (5.6) y (5.10) la expresión (5.3) es

$$T = \dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T P_i I_{ci} P_i^T J_{\omega i} \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (5.11)$$

5.2.2 Energía potencial

La energía potencial almacenada en el eslabón i del mecanismo es definido como la cantidad de trabajo requerido para elevar su centro de masa de un plano de referencia horizontal (ubicado en la base inercial) a su posición actual.

Con referencia a la base inercial, el trabajo requerido para desplazar el eslabón i a la posición r_i es $-m_i \mathbf{g}^T r_i$, donde $\mathbf{g}^T = [0, 0, -9.81]^T$ con unidades de $[m/s^2]$

$$V = -m_1 \mathbf{g}^T r_1, -m_2 \mathbf{g}^T r_2, \dots, -m_i \mathbf{g}^T r_i = - \sum_{i=1}^m m_i \mathbf{g}^T r_i \quad (5.12)$$

5.2.3 Determinación del torque en las juntas articulares θ_1 y θ_2

Se determina la energía cinética empleando (5.11), por tanto

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[\sum_{i=1}^2 m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T P_i I_{ci} P_i^T J_{\omega i} \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (5.13)$$

Donde,

$$J_{vi} = [e \times s_1 \quad P_1(e \times s_2) \quad \dots \quad P_{i-1}(e \times s_i)] \quad (5.14)$$

$$J_{\omega i} = [e_1 \times \quad P_1(e_2 \times) \quad \dots \quad P_{i-1}(e_3 \times)] \quad (5.15)$$

Donde $e_1 = [0 \ 0 \ 1]^T$ es el vector axial, P_1 , y P_2 corresponden respectivamente a (4.8) y (4.9). I_{ci} son las matrices de inercia de masa medido en su centro de masa de cada eslabón, el cual tiene la forma,

$$I_{ci} = \begin{bmatrix} I_{m21xx} & I_{m21xy} & I_{m21xz} \\ I_{m21xy} & I_{m21yy} & I_{m21yz} \\ I_{m21xz} & I_{m21zy} & I_{m21zz} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Se determina la matriz de inercia de masa del álabes I_{c2} mediante un software comercial, el cual tiene componentes: $I_{m21xx} = 11.148$, $I_{m21xy} = -0.004$, $I_{m21xz} = 0.009$, $I_{m21yx} = -0.004$, $I_{m21yy} = 11.186$, $I_{m21yz} = 0.019$, $I_{m21zx} = 0.009$, $I_{m21zy} = 0.019$, $I_{m21zz} = 0.057$ siendo el mismo para los tres álabes. De igual forma se determina la ubicación de los centros de masa los cuales se observan en la figura 5.1, para la góndola se considera que esta ubicado a una distancia $l_{cm1} = 0.5l_g$ y el centro de masa del álabes esta a $l_{cm2} = 0.3015l_a$ y sus respectivas masa son, para la góndola $m_1 = 120$ kg y para el álabes $m_2 = 21.07$ kg.

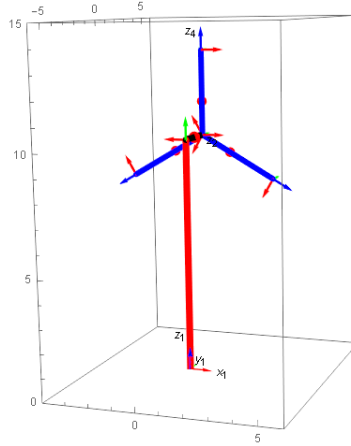


Figura 5.1: Ubicación de los centros de masa.

Se determina la energía cinética del aerogenerador (5.17), los cuales incluyen al conjunto de álabes y la góndola, mediante (5.13).

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{4}(\dot{\theta}_1^2(2I_{m1y} + 3 \cos(2\theta_2)(I_{m21zz} - I_{m21xx}) + 3I_{m21xx} - 3 \sin(2\theta_2)(I_{m21xz} + I_{m21zx}) \\
 & + 3I_{m21zz} + 2l_{cm1}^2 m_1 + 3m_{21}((l_{cm2} + rb)^2 + 2lg^2)) + 6\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 (\cos(\theta_2)(I_{m21yz} + I_{m21zy}) \\
 & - \sin(\theta_2)(I_{m21xy} + I_{m21yx})) + 6\dot{\theta}_2^2 (I_{m21yy} + m_{21}(l_{cm2} + rb)^2))
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Posteriormente se emplea la ecuación de E-L (5.1) para hallar el torque en las juntas articulares, para el caso $j = 1$ y $j = 2$ se halla el torque τ_1 en la junta θ_1 y τ_2 en la junta θ_2 respectivamente, los cuales permiten reorientar la góndola y girar el rotor eólico bajo las condiciones descritas en el capítulo 4. En las figuras 5.2a y 5.2b se observa el comportamiento del torque en función del tiempo para tal caso de estudio.

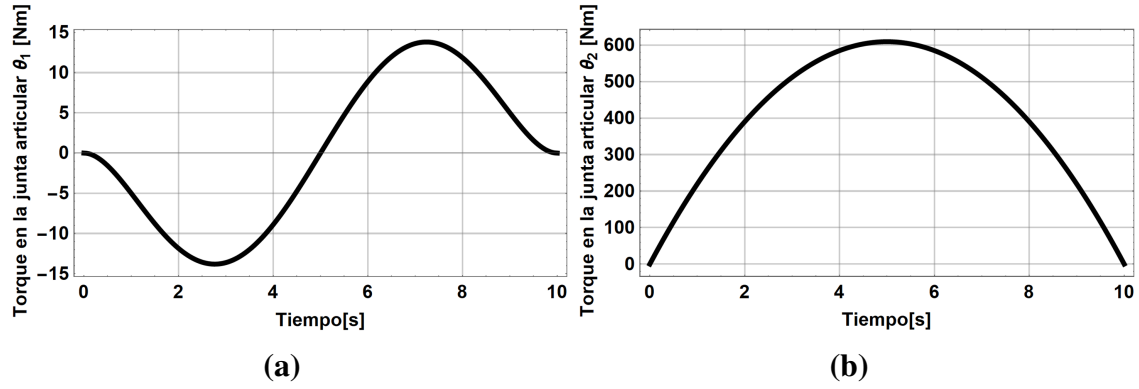


Figura 5.2: Torque en las juntas articulares θ_1 y θ_2 .

El torque en la junta articular θ_1 está dada por (5.18) en el cual se puede identificar tres términos, los cuales son el torque debido a la aceleración tangencial τ_{T_1} , el torque debido a la aceleración de coriolis τ_{Cor_1} y el torque debido a la aceleración centrífuga τ_{C_1} , En las figuras 5.3a, 5.3b y 5.3c se puede observar el comportamiento de dichas componentes en función del tiempo.

$$\tau_1 = \tau_{T_1}(\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2) + \tau_{Cor_1}(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) + \tau_{C_1}(\dot{\theta}_2^2) \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \tau_{T_1} = & \frac{3}{2} (\cos(\theta_2) (I_{m21yz} + I_{m21zy}) - \sin(\theta_2) (I_{m21xy} + I_{m21yx})) \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{2}{3} I_{m1y} + I_{m21xx} + I_{m21zz} \right) \ddot{\theta}_1 \\ & + \frac{3}{2} (m_1 l_{cm1}^2 + m_2 ((l_{cm2} + rb)^2 + 2lg^2) + \cos(2\theta_2) (I_{m21zz} - I_{m21xx})) \ddot{\theta}_1 \\ & + \frac{3}{2} (\sin(2\theta_2) (I_{m21xz} + I_{m21zx})) \ddot{\theta}_1 \\ \tau_{Cor_1} = & -3 (\sin(2\theta_2) (I_{m21xx} - I_{m21zz}) + \cos(2\theta_2) (I_{m21xz} + I_{m21zx})) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \tau_{C_1} = & -\frac{3}{2} \cos(\theta_2) (I_{m21xy} + I_{m21yx}) - \sin(\theta_2) (I_{m21yz} + I_{m21zy}) \dot{\theta}_2^2 \end{aligned}$$

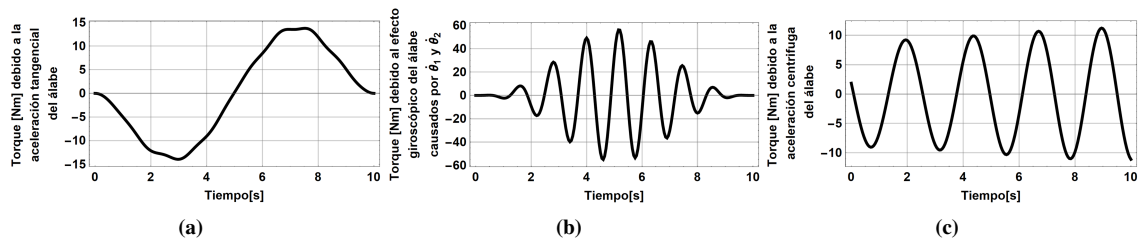


Figura 5.3: Torque en la junta 1 debido a las fuerzas inerciales.

Derivando la expresión (5.17) con respecto a θ_2 se obtiene expresión para el torque en la junta articular θ_2 , de igual forma se puede observar que tiene componentes correspondientes a aceleración tangencial y aceleración centrífuga, a su vez, en las figuras 5.4a y 5.4b se puede observar tales comportamientos respectivamente.

$$\tau_2 = \tau_{T_2}(\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2) + \tau_{C_2}(\dot{\theta}_1^2) \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \tau_{T_2} &= \frac{3}{2}(\cos(\theta_2)(I_{m21yz} + I_{m21zy}) - \sin(\theta_2)(I_{m21xy} + I_{m21yx}))\ddot{\theta}_1 + \frac{3}{2}(I_{m21yy})\ddot{\theta}_2 \\ &\quad + \frac{3}{2}(2m_{21}(l_{cm2} + rb)^2)\ddot{\theta}_2 \\ \tau_{C_2} &= \frac{3}{2}(\sin(2\theta_2)(I_{m21zz} - I_{m21xx}) + \cos(2\theta_2)(I_{m21xz} + I_{m21zx}))\dot{\theta}_1^2 \end{aligned}$$

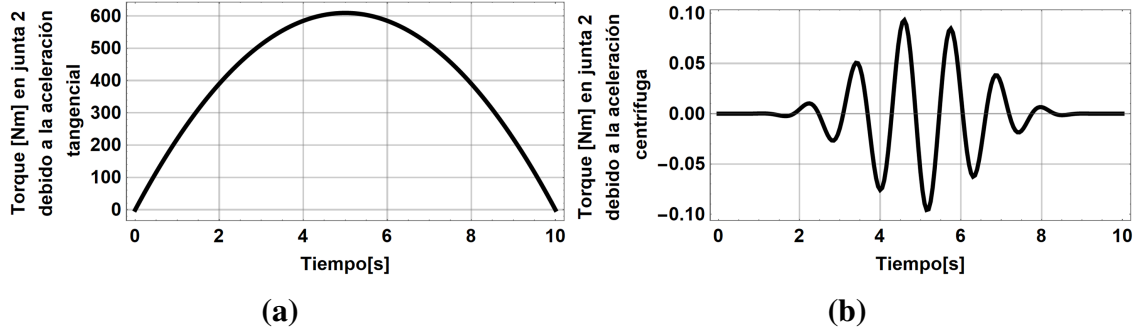


Figura 5.4: Torque en junta 2 debido a las fuerzas inerciales.

5.3 Las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler

De las ecuaciones de movimiento de traslación de Newton [23], se tiene que

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_G) = m\mathbf{a}_G \quad (5.20)$$

Donde,

m : es la masa del cuerpo

$\mathbf{v}_G, \mathbf{a}_G$: Velocidad y aceleración lineal en el centro de masa del cuerpo respectivamente.

De la ecuaciones de movimiento rotatorio del cuerpo

$$\sum \mathbf{M}_o = \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_o) \quad (5.21)$$

Suponiendo que se tiene dos marco de referencia o bases, donde $\mathbf{B}_1 = \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1 = x_1\hat{\mathbf{i}}, y_1\hat{\mathbf{j}}, z_1\hat{\mathbf{k}}$ es la base inercial y $\mathbf{B}_n = \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n = x_n\hat{\mathbf{i}}, y_n\hat{\mathbf{j}}, z_n\hat{\mathbf{k}}$ es la base local o móvil. Suponiendo que la base inercial o móvil \mathbf{B}_n gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ con respecto a la base inercial \mathbf{B}_1 . El momentum angular en la base móvil es $\mathbf{H}_o = H_x\hat{\mathbf{i}} + H_y\hat{\mathbf{j}} + H_z\hat{\mathbf{k}}$. Por lo que la derivada con respecto al tiempo de las magnitudes de \mathbf{H}_o es

$$(\dot{\mathbf{H}}_o)_{rel} = \dot{H}_x\hat{\mathbf{i}} + \dot{H}_y\hat{\mathbf{j}} + \dot{H}_z\hat{\mathbf{k}} \quad (5.22)$$

Cuando la derivada con respecto al tiempo de \mathbf{H}_o , se considera con respecto a \mathbf{B}_1 las direcciones de la base local cambian debido a la rotación $\boldsymbol{\Omega}$ de los ejes y debido a la

traslación por lo que

$$\dot{\mathbf{H}}_o = \dot{H}_x \hat{i} + \dot{H}_y \hat{j} + \dot{H}_z \hat{k} + H_x \dot{\hat{i}} + H_x \dot{\hat{j}} + H_x \dot{\hat{k}} \quad (5.23)$$

Considerando que $\dot{\hat{i}} = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{i}$, $\dot{\hat{j}} = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{j}$, $\dot{\hat{k}} = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{k}$, entonces

$$\dot{\mathbf{H}}_o = (\dot{\mathbf{H}}_o)_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_o \quad (5.24)$$

Además $\mathbf{H}_o = \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega}$, por lo que

$$\mathbf{M}_o = \dot{\mathbf{H}}_o = \mathbf{I}_o \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega} \quad (5.25)$$

Donde $\boldsymbol{\omega}$: es la velocidad angular total del cuerpo medido desde en el sistema local, \mathbf{I}_o : es el tensor de inercia medido con respecto al punto O.

5.3.1 Determinación de las ecuaciones de movimiento para el mecanismo de reorientación del aerogenerador

La velocidad angular del mecanismo de reorientación del aerogenerador medido en la base local correspondiente a $\mathbf{B}_3 = \{\mathbf{X}_3, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Z}_3\} = \{X_3 \hat{i}_3, Y_3 \hat{j}_3, Z_3 \hat{k}_3\}$

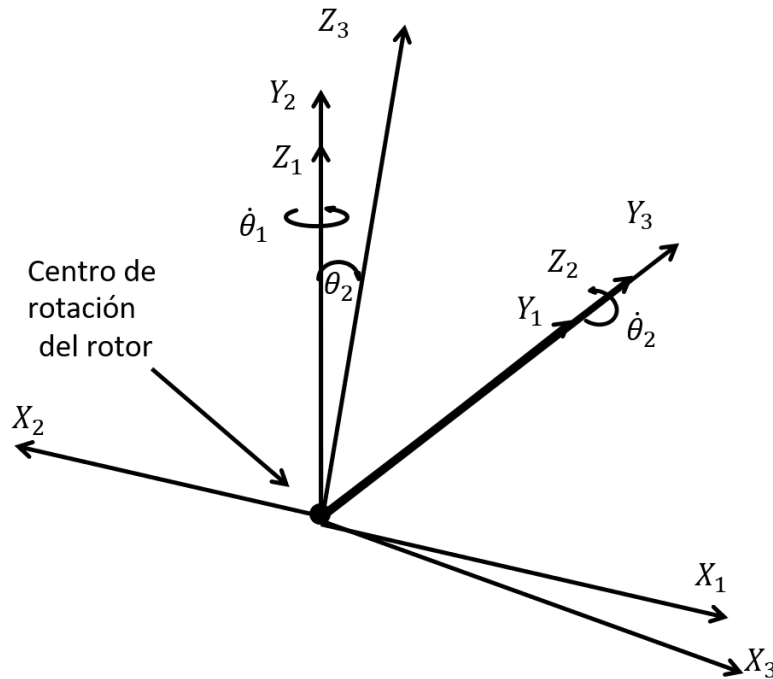


Figura 5.5: Marcos de referencia en el eje de referencia del rotor.

$$\boldsymbol{\omega}_{2t} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{2t} = (\dot{\theta}_1 \sin(\theta_2) \hat{i}_3 + \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) \hat{k}_3 + \dot{\theta}_2 \hat{j}_3)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{2t} = (\dot{\theta}_1 \sin(\theta_2) \hat{i}_3 + \dot{\theta}_2 \hat{j}_3 + \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) \hat{k}_3)$$

La aceleración angular esta dado por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}_{2t}) &= \\
&= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{2l}) = \boldsymbol{\alpha}_2 \\
&= \hat{i}_3 \left(\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_2) \right) + \hat{j}_3 \ddot{\theta}_2 + \hat{k}_3 \left(\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \right)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Sustituyendo (5.3.1) y (5.26) en (5.25), y dado que sistema \mathbf{B}_3 esta fijo al álabo entonces, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_{2t}$, por lo que se obtiene,

- a) Los momentos generados en el caso mas general donde se experimenta fuerzas inerciales debido a aceleración angular, fuerzas centrífugas y giroscópicas.

$$\begin{aligned}
M_1 &= \begin{Bmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \end{Bmatrix} \\
&+ \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_2) \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) \end{Bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_2) \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
M_{x1} &= \ddot{\theta}_1 (I_{xx} \sin(\theta_2) - I_{xz} \cos(\theta_2)) - \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 (\cos(\theta_2) (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) - 2I_{xz} \sin(\theta_2)) \\
&+ \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) (I_{xy} \sin(\theta_2) + I_{yz} \cos(\theta_2)) - \dot{\theta}_2^2 I_{yz} - \ddot{\theta}_2 I_{xy} \\
M_{y1} &= \frac{1}{2} (-2\ddot{\theta}_1 (I_{xy} \sin(\theta_2) + I_{yz} \cos(\theta_2)) + \dot{\theta}_1^2 (\sin(2\theta_2) (I_{xx} - I_{zz}) - 2I_{xz} \cos(2\theta_2))) \\
&+ 2\ddot{\theta}_2 I_{yy} \\
M_{z1} &= \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 (\sin(\theta_2) (-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) + 2I_{xz} \cos(\theta_2)) \\
&+ \dot{\theta}_1^2 (-\sin(\theta_2) (I_{xy} \sin(\theta_2) + I_{yz} \cos(\theta_2)) + \dot{\theta}_2^2 I_{xy} \\
&+ \ddot{\theta}_1 (I_{zz} \cos(\theta_2) - I_{xz} \sin(\theta_2)) - \ddot{\theta}_2 I_{yz}
\end{aligned}$$

- b) En este caso, se obtienen los momentos inerciales inducidos para el caso cuando la góndola y el rotor giran a velocidad angular constante (no existe aceleración angular).

$$M_2 = \begin{Bmatrix} M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \\ 0 \\ -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2) \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2) \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} M_{x2} &= -\dot{\theta}_2^2 I_{yz} + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 (\cos(\theta_2) (-I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) - 2I_{xz} \sin(\theta_2)) \\ &\quad + \dot{\theta}_1^2 (I_{xy} \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + I_{yz} \cos^2(\theta_2)) \\ M_{y2} &= (-I_{xz} \cos^2(\theta_2) + \sin(\theta_2) I_{xx} \cos(\theta_2) - \sin(\theta_2) I_{zz} \cos(\theta_2) + \sin^2(\theta_2) I_{xz}) \dot{\theta}_1^2 \\ M_{z2} &= (-\cos(\theta_2) I_{yz} \sin(\theta_2) - \sin^2(\theta_2) I_{xy}) \dot{\theta}_1^2 + 2 \cos(\theta_2) I_{xy} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \\ &\quad + \sin(\theta_2) (-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + I_{xz} \dot{\theta}_2^2 \end{aligned}$$

- c) El momento giroscópico se define como el momento inducido por el producto de velocidades angulares, los cuales corresponden a

$$M_3 = \begin{Bmatrix} M_{x3} \\ M_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos\theta_2) \\ 0 \\ -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2) \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 (\cos\theta_2) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2) \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 (\cos\theta_2) \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} M_{x3} &= \cos(\theta_2) (-I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - 2 \sin(\theta_2) I_{xz} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ M_{y3} &= 0 \\ M_{z3} &= 2 \cos(\theta_2) I_{xz} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \sin(\theta_2) (-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

5.3.2 Resultados de los momentos determinados en la raíz del álabe

Para determinar las magnitudes de los momentos en la raíz del álabe, es necesario determinar el tensor de inercia de masa del álabe, las magnitudes de las velocidades y aceleraciones en las juntas cinemáticas del mecanismo del aerogenerador, esto es la velocidad y aceleración angular del rotor principal, $\dot{\theta}_2$ y $\ddot{\theta}_2$ respectivamente. Así como también la velocidad y aceleración angular de reorientación de la góndola, $\dot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_1$ respectivamente.

Se determina el tensor de inercia de masa medido en la raíz I_o del álabe mediante un software comercial el cual tiene componentes: $I_{xx} = 30.553$, $I_{xy} = -0.004$, $I_{xz} = 0.273$, $I_{yx} = -0.004$, $I_{yy} = 30.594$, $I_{yz} = 0.024$, $I_{zx} = 0.273$, $I_{zy} = 0.024$, $I_{zz} = 0.060$. Las velocidades y aceleraciones tanto del giro del rotor principal como del giro

de reorientación de la góndola fueron determinados en el capítulo 4. Se obtuvieron para el primer caso un conjunto de velocidades y aceleraciones a partir de las velocidades de viento y para el segundo caso un conjunto velocidades y aceleraciones de orientación determinados a partir de condiciones iniciales, intermedias y finales de recorrido. Dichas gráficas se muestran las figuras 5.6a y 5.6b.

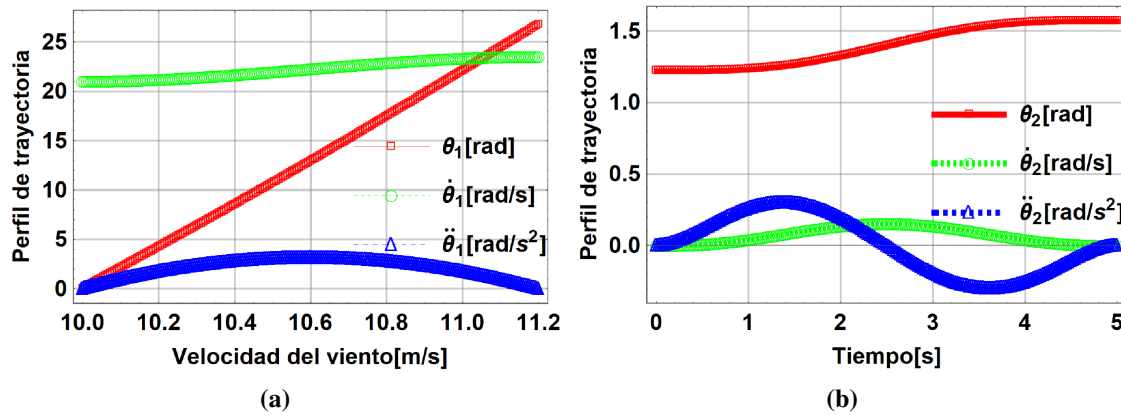


Figura 5.6: a) Trayectoria articular del rotor eólico durante un cambio de velocidad del viento de 10 m/s a 11.2 m/s . b) Trayectoria de la junta articular de la góndola.

En las figuras 5.7, 5.8, 5.9 se muestran los momentos en la raíz del alabe sobre los tres ejes ortogonales locales los cuales fueron determinados para los tres casos generados y que corresponden a las expresiones (5.27), (5.28), (5.29), que consisten respectivamente en los momentos M_{x1}, M_{y1}, M_{z1} generados cuando el aerogenerador está sometido al caso a), los momentos M_{x2}, M_{y2}, M_{z2} inducidos en la raíz del álabe en el caso b) que corresponde cuando el aerogenerador está sometido solo a velocidades angulares constantes tanto en el movimiento de la góndola y rotor. Finalmente momentos M_{x3}, M_{y3}, M_{z3} debido exclusivamente al efecto giroscópico.

En la figura 5.7 se observa el comportamiento de los momentos M_{x1}, M_{y1}, M_{z1} , los cuales están definido en (5.27). El momento inducido M_{x1} produce una deflexión fuera del plano del rotor, tal deflexión se debe al efecto giroscópico y a la aceleración angular, se puede observar que dicho momento inducido es alternante y de magnitud considerable. Por otro lado se puede observar que los momentos M_{y1} y M_{z1} de igual forma son fuerzas alternantes pero estas son considerablemente pequeñas.

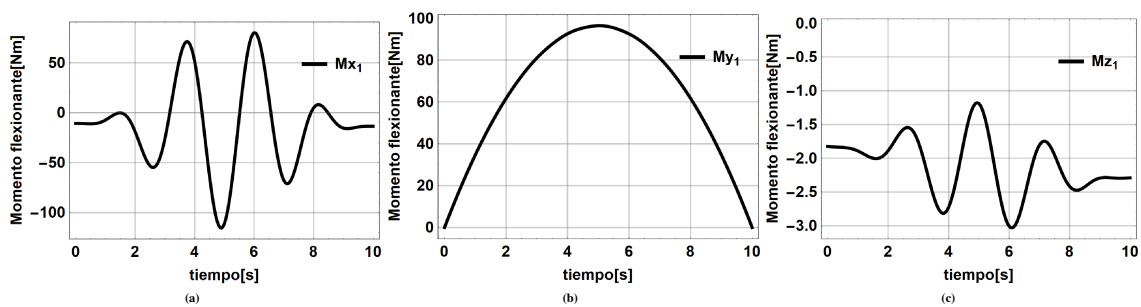


Figura 5.7: Momentos generados en los ejes principales de la junta θ_2 : caso 1.

En la figura 5.8 se observa el comportamiento de los momentos M_{x2}, M_{y2}, M_{z2} del segundo caso de estudio, de igual forma que en el primer caso de estudio destaca por su

magnitud el momento en M_x en el eje local X_3 , el cual provoca deflexión fuera del plano del rotor.

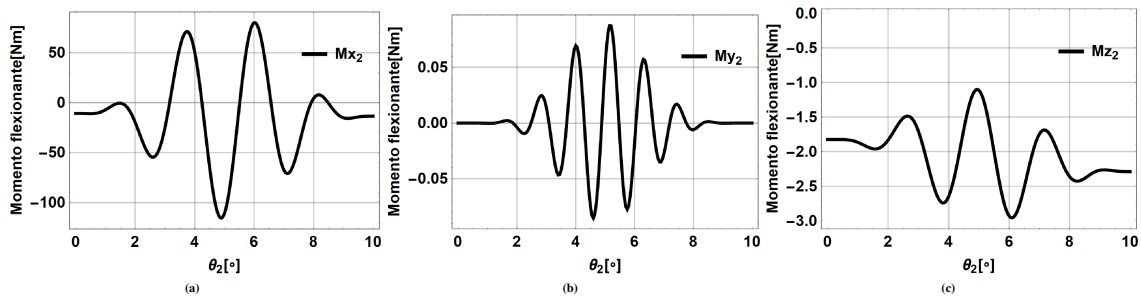


Figura 5.8: Momentos generados en los ejes principales de la junta θ_2 : caso 2.

En la figura 5.9a se presentan los momentos inducidos exclusivamente por fuerzas giroscópicas, se observa que en el eje Y_3 no se induce momentos giroscópicos y en el eje Z_3 el momento inducido puede ser despreciable, mientras que el momento M_{x_3} es alternante y depende del lapso de tiempo de orientación de la góndola.

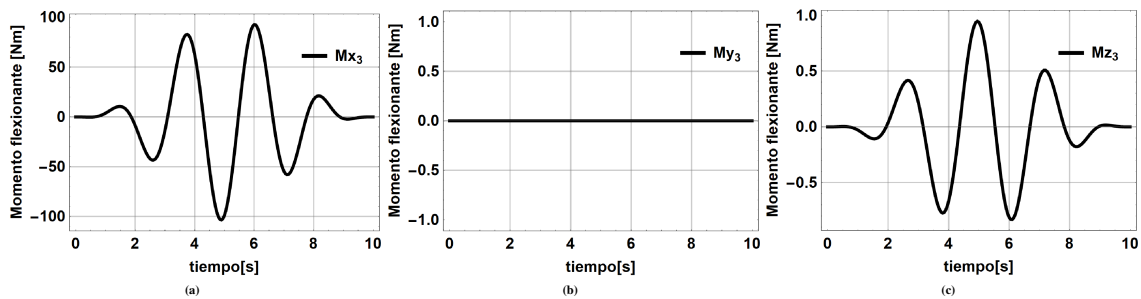


Figura 5.9: Momentos generados en los ejes principales de la junta θ_2 : caso 3.

5.3.3 Determinación del comportamiento del momento giroscópico en un ciclo del rotor

Se determinan el comportamiento del momento giroscópico inducido durante un ciclo del rotor para ello se seleccionan los valores máximos de momentos inducidos los cuales corresponden a valores extremos y corresponden a las condiciones iniciales, intermedias y finales de las trayectorias, de estos tres puntos de la trayectoria el caso más importante es el intermedio dado que los puntos iniciales y finales en la junta de reorientación es igual a cero, por lo que el seleccionado es el intermedio para presentar resultados y analizar a éstos.

Como se puede observar en la figura 5.10 se presentan los momentos flexionantes para el primer caso de estudio, destacan por su magnitud los momentos M_x y M_y en los ejes locales X_3 y Y_3 respectivamente, de los cuales el momento M_x es de especial interes ya que provoca la deflexión fuera del plano del rotor eólico. Se puede observar que los momentos máximos se presentan cuando el álabe es perpendicular a la fuerza giroscópica inducida y por otra lado no se induce momento giroscópico cuando el álabe es paralelo a las fuerzas giroscópicas inducidas .

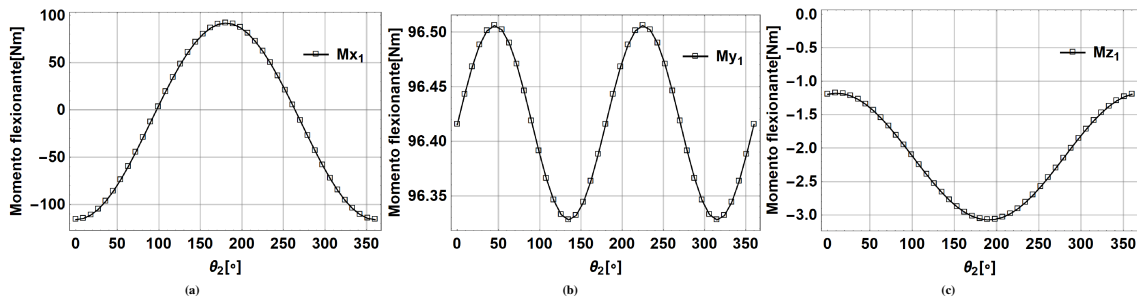


Figura 5.10: Momentos generados sobre la raíz del álabe vs θ_2 , $\theta_2 \in [0, 2\pi]$: caso 1.

Para el caso 3 se puede observar el mismo comportamiento que el caso 1 donde a 0° , 180° y 360° se presenta el máximo momento inducido y para 90° y 270° el momento giroscópico inducido es cero, como se puede observar en la figura 5.11a

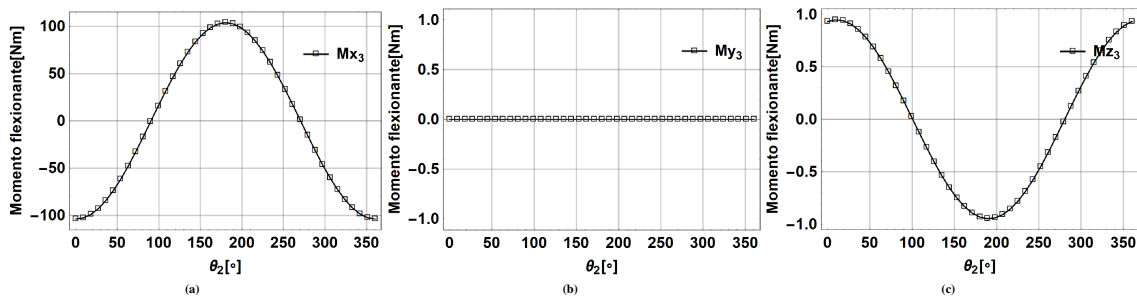


Figura 5.11: Momentos generados sobre la raíz del álabe vs θ_2 , $\theta_2 \in [0, 2\pi]$: caso 3.

5.4 Conclusiones

En este capítulo se determinó a través de la dinámica de Lagrange el torque en función del tiempo en la junta articular θ_1 y θ_2 requeridas para orientar la góndola de tal forma que describan las posiciones, velocidades y aceleraciones de las trayectorias impuestas en el modelado cinemático. Se determinó que se requiere un torque máximo de 15 Nm en θ_1 y un torque de 600 Nm para θ_2 . También, se determinaron los torques M_x , M_y , M_z en la raíz del álabe a través de las ecuaciones dinámicas de Newton-Euler. En específico el momento M_x resultó de especial interés dado que provoca la deflexión transversal del álabe fuera del plano del rotor y esta fuerza se genera debido al efecto giroscópico. El momento M_x inducido fue de 110 N . Al término de este capítulo se puede concluir que el efecto giroscópico depende del tiempo de orientación de la góndola y provoca un momento alternante en el álabe fuera del plano del rotor, también se concluye que el momento giroscópico en la raíz del álabe varía a lo largo de un ciclo del rotor eólico presentándose los momentos máximos cuando el álabe es perpendicular a la fuerza giroscópica inducida, por otro lado cuando el álabe es paralelo a las fuerzas giroscópicas inducidas el momento giroscópico en la raíz del álabe es nulo.

Resultados y conclusiones

6.1 Introducción

En este capítulo se determina la deflexión transversal del álabe considerando la suma de fuerzas aerodinámicas y giroscópicas, las fuerzas aerodinámicas fueron determinadas en el capítulo 2 y corresponde al caso cuando el aerogenerador experimenta condiciones nominales de operación, mientras que las fuerzas giroscópicas son las fuerzas inducidas en el álabe debido al movimiento giroscópico del mecanismo.

6.2 Determinación de la deflexión transversal debido a cargas aerodinámicas e inerciales

Se determina el momento inducido por el efecto giroscopio en el álabe para diferentes casos de estudio. Considerando que el rotor experimenta una reorientación de 20° se evalúan los casos cuando el aerogenerador experimenta velocidades de viento de 3 m/s , 8 m/s y 11 m/s a tales casos les corresponden velocidades angulares del rotor de 6.3 rad/s , 16.8 rad/s y 23.1 rad/s respectivamente, para cada caso se varía el tiempo de reorientación de la góndola en 1 s , 10 s , 20 s y se hallan los momentos inducidos en la raíz del álabe como se observa en la la tabla 6.1.

Tabla 6.1: Momento inducido en el álabe a diferentes casos de estudio.

$U\text{ (m/s)}$	$\dot{\theta}_2\text{ (rad/s)}$	$t\text{ (s)}$	$M_{x3}\text{ (Nm)}$
3	6.3	1	300
		10	30
		20	15
8	16.8	1	800
		10	80
		20	40
11	23.1	1	1100
		10	110
		20	55

Posteriormente se determina la distribución de cargas giroscópicas a lo largo del eje longitudinal del álabe como se observa en la figura 6.1 para los casos cuando la góndola se reorienta a diferentes lapsos del tiempo.

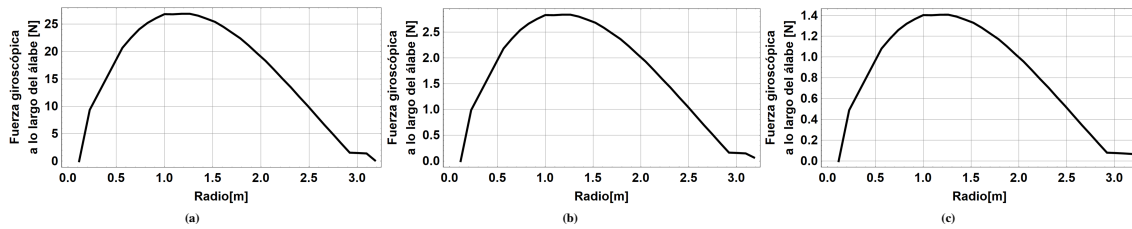


Figura 6.1: Distribución de fuerza normal debido al momento giroscópico a lo largo del eje longitudinal del álabe. a) Tiempo de reorientación 1s b) Tiempo de reorientación 10s c) Tiempo de reorientación 20s.

Se puede observar que la distribución de fuerza giroscópica a lo largo del álabe esta relacionada con la distribución de masa a lo largo del álabe, en el primer tercio de la longitud del álabe la fuerza giroscópica incrementa esto se debe a que en esta zona la masa también se incrementa dado que es la zona estructural del álabe, posteriormente a ello la fuerza giroscópica disminuye debido a que el álabe se vuelve mas esbelto en la zona aerodinámica. Observando las figuras 6.1a, 6.1b y 6.1c Se puede apreciar que a mayor lapso de tiempo de orientación de la góndola menor es la fuerza giroscópica inducida.

Se determina la deflexión del álabe considerando la sumatoria de cargas aerodinámicas y fuerzas giroscópicas, para determinar la deflexión del álabe se emplea una formulación mediante elementos finitos de viga de manera similar al método empleado en el capítulo 3. Se realiza una comparación de tales deflexiones con las deflexiones obtenidas considerando exclusivamente cargas aerodinámicas (sin considerar efectos giroscopios), tales resultados los resultados se presentan en la tabla 6.2, mientras en la figura 6.2 se puede apreciar dicha comparación para el caso cuando la góndola se reorienta en 1s.

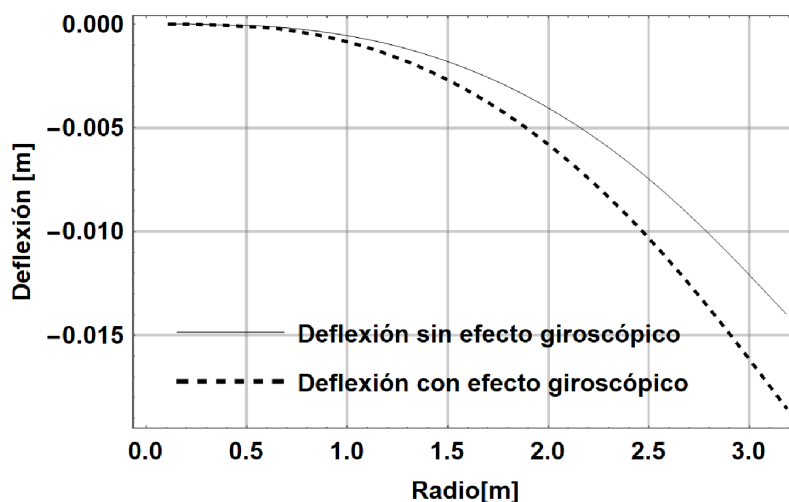


Figura 6.2: Deflexión del álabe debido a fuerzas aerodinámicas y giroscópicas.

Tabla 6.2: Deflexión del álabes para diferentes casos de estudio.

Velocidad del viento (m/s)	Lapso de tiempo de orientación de la góndola (s)	Momento inducido por el efecto giroscópico (Nm)	Deflexión sin efecto giroscópico (m)	Deflexión con efecto giroscópico (m)	Diferencia (m)
11	1	1100		-0.0184844	0.00451
	10	110	-0.0139676	-0.0144462	0.000478
	20	55		-0.0142062	0.000238

6.3 Conclusiones

En este trabajo de tesis se determinó el efecto del movimiento giroscópico del rotor en la deflexión de los álabes de un aerogenerador, se concluye que dicho efecto induce un momento que provoca una deflexión alternante del álabes fuera del plano del rotor, dicho momento depende del lapso de tiempo de orientación de la góndola, de forma general se concluye que cuando menor es el lapso de tiempo de orientación de la góndola mayor es el momento inducido por tal efecto y por tanto se experimenta mayor deflexión, tales momentos inducidos pueden llegar a causar una deflexión significativa en el álabes por tanto se incrementa el riesgo de colisión con la torre. En el capítulo 2 se realizó el diseño aerodinámico del álabes de un aerogenerador de 10 kW de potencia empleando la teoría del momentum del elemento del álabes, se consideró un rotor óptimo con rotación de estela. Se presentó una metodología explícita para realizar el diseño de álabes para aerogeneradores de eje horizontal.

En el capítulo 3 se realizó la determinación de las deflexiones del álabes diseñado considerando que éste presenta una variación de cuerda y rigidez a lo largo de su eje horizontal. Para tal determinación se dividió el álabes en 30 secciones y se empleó una formulación de elementos finitos de viga. Para determinar dicha deflexión se empleó una matriz de rigidez isoparamétrica para deformaciones transversales y cargas aerodinámicas, finalmente los resultados se validaron mediante un software comercial.

En el capítulo 4 se realizó el modelado cinemático del aerogenerador, para tal efecto se empleó el método de D-H con el cual se obtuvieron modelos matemáticos para determinar la posición de la punta del álabes, derivando tales funciones se obtuvieron tanto velocidades lineales y aceleraciones lineales. Se modeló la velocidad angular del rotor eólico el cual está en función de la velocidad del viento y posteriormente se modeló la velocidad angular de orientación de la góndola el cual depende del lapso de tiempo de reorientación. Finalmente se determinaron las posiciones, velocidades y aceleraciones lineales de los elementos del mecanismo en función de la velocidad del viento y lapso de tiempo de reorientación de la góndola.

En el capítulo 5 se realizó el modelado dinámico del aerogenerador en donde se determinó el torque requerido para reorientar la góndola bajo las condiciones establecidas por la cinemática modelada previamente, para tal caso se empleó la dinámica de Lagrange. Enseguida, mediante las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler se determinaron los momentos inducidos en los ejes principales de la raíz del álabes. Se analizaron tres casos

de estudio, se analizó el caso más general el cual considera que el rotor y góndola experimentan aceleraciones angulares, por tanto los momentos inducidos en los ejes principales se deben a fuerzas centrífugas, fuerzas giroscópicas y aceleraciones angulares. En el segundo caso analizado se consideró que tanto el rotor y la góndola rotan a velocidades angulares constantes, en este caso los momentos inducidos se deben solamente a fuerzas centrífugas y giroscópicas, en el último caso analizado se aislaron los momentos debido a fuerzas giroscópicas. Finalmente se determinó la deflexión del álabe considerando la sumatoria de fuerzas aerodinámicas y fuerzas giroscópicas para el caso cuando el rotor experimenta una velocidad angular constante de 11 m/s y la góndola se reorienta a lapsos de tiempos de 1s , 10s , 20s . Se concluye que el efecto giroscópico depende del tiempo de orientación de la góndola, a menor lapso de tiempo de orientación de la góndola mayor es el momento inducido que causa la deflexión del álabe fuera del plano del rotor, se concluye también que el momento giroscópico en la raíz del álabe inducido varía a lo largo de un ciclo de operación del rotor presentándose valores máximos cuando el álabe es perpendicular a la fuerza inducida y durante los tiempos cuando el álabe es paralelo a la fuerza giroscópica los momentos en la raíz del álabe es cero.

Apéndices

Teoría de vigas

Teoría de viga de Euler-Bernoulli

La cinemática del modelo de Euler-Bernoulli consiste en suponer las secciones transversales de la viga son planas antes y durante la deformación (secciones transversales son rígidas) y la sección transversal es ortogonal al eje longitudinal de la viga después de la deformación como se puede ver en la segmento de línea $A''B''$ de la figura A.1a.

La cinemática de la viga esta compuesta por dos movimientos rígidos, el primero es una traslación rígida $v(x)$ de la sección transversal de la viga en dirección y pasando de AB a $A'B'$, posteriormente ocurre una rotación rígida α en torno al eje z pasando de la posición $A'B'$ a $A''B''$. Observe que debido a la rotación de la sección transversal en torno al eje z se presenta una deformación Δu en la dirección x y un deformación Δv en la dirección z

A partir de la figura A.1, se observa que ocurre un desplazamiento axial Δu del punto A , y dado la diferencia entre las estados inicial y final de este punto tenemos

$$\Delta u = x - \Delta x - x = -\Delta x \quad (\text{A.1})$$

Suponiendo que el punto A está a una distancia y del eje x , el cual pasa por el centro de gravedad de la sección transversal, la siguiente relación es valida

$$\tan \alpha = \frac{\Delta x}{y - \Delta v} = -\frac{v(x)}{y - \Delta v} \quad (\text{A.2})$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

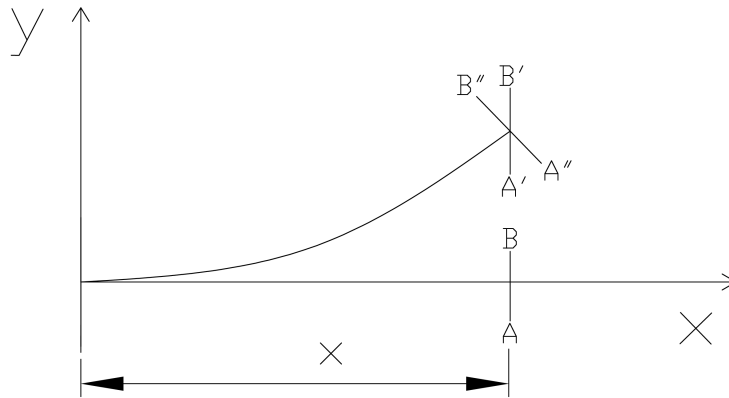
luego

$$\Delta u = -y \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{(\Delta v)^2}{\Delta x} \quad (\text{A.3})$$

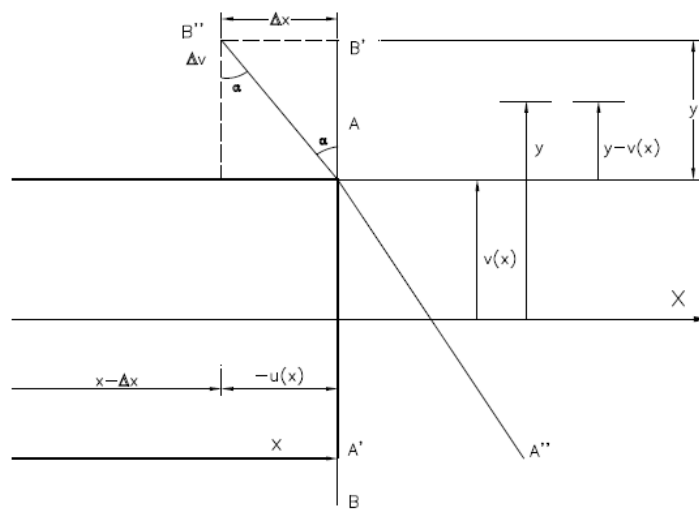
Donde

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u(x)}{y - \Delta v} \quad (\text{A.4})$$

Suponiendo que α es pequeño, se tiene que Δx y Δv también son pequeños, el término $\frac{(\Delta v)^2}{\Delta x}$ puede ser despreciado. Por tanto, la deformación axial $u(x)$ de la sección transversal x es dado por



(a)



(b)

Figura A.1: a) Viga de Euler-Benoulli b) Sección AB en detalles.

$$u(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-y \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] = -y \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad (\text{A.5})$$

Aplicando la definición de derivada se tiene que

$$u(x) = -y \frac{dv(x)}{dx} \quad (\text{A.6})$$

Para determinar la expresión para $\epsilon_{xx}(x)$ se procede de la siguiente forma. Considere una sección de viga arbitrario $u(x)$ antes de la deformación. Debido a la flexión la sección transversal será $u(x + \Delta x)$, ahora escribiendo lo anterior en términos de desplazamiento transversal, tenemos que $u(x) = -y \frac{dv(x)}{dx}$ y $u(x + \Delta x) = -y \frac{dv(x + \Delta x)}{dx}$. La variación de deformación axial específica estará dada por

$$\frac{\Delta_x}{\Delta_y} = \frac{u(x + \Delta_x) - u(x)}{x + \Delta_x - x} = \frac{(-y \frac{dv(x+\Delta_x)}{dx}) - y \frac{dv(x)}{dx}}{\Delta_x} = -y \frac{\frac{d}{dx}[v(x + \Delta_x) - v(x)]}{\Delta_x} \quad (\text{A.7})$$

La deformación específica ϵ_{xx} dada y tomándose el límite cuando Δ_x tiende a cero tenemos

$$\epsilon_{xx} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \left\{ -y \frac{\frac{d}{dx}[v(x+\Delta_x) - v(x)]}{\Delta_x} \right\} = -y \frac{d}{dx} \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad (\text{A.8})$$

Siendo $v(x + \Delta_x) - v(x)$ la variación de la deformación axial entre los estados deformado y no deformado. Empleando la definición de derivada tenemos

$$\epsilon_{xx} = -y \frac{d}{dx} \left(-y \frac{dv(x)}{dx} \right) = -y \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \quad (\text{A.9})$$

La teoría de viga de Euler-Bernoulli no considera el efecto de esfuerzos cortantes durante la deflexión de la viga, en el caso de vigas cortas, el efecto de los esfuerzos cortantes es significativo. A medida que la relación (L/h) disminuye, las secciones transversales de la viga dejan de conservarse planas al experimentar la deformación.

La cinemática de la viga es similar a la viga de Euler-Bernoulli; esto es, que las secciones transversales de la viga son planas antes y durante la deformación (se comporta como un cuerpo rígido), sin embargo, las secciones transversales no son necesariamente perpendiculares al eje de la viga después de la deformación (ver segmento $A''B''$ de la figura A.2a). La hipótesis de Timoshenko representa una mayor aproximación a la deformación real de la sección transversal en vigas de gran canto.

De forma análoga al modelo de Euler, la sección transversal AB sufre un desplazamiento vertical rígido $v(x)$ y una rotación rígida $\alpha(x)$ en torno al eje z pasando por la posición intermedia $A'B'$ como se muestra en la figura A.2b. Como la viga de Timoshenko considera las deformaciones cortantes, se tiene una deformación $\beta(x)$ (el cual se asume que es constante en el área de la sección transversal) haciendo que la sección transversal AB llegue a la posición final $A''B''$

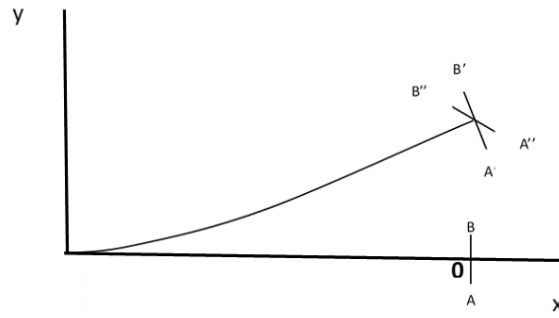
En la práctica, la deformación cortante $\beta(x)$ no es constante en la sección transversal, por que será necesario aplicar una corrección para efectos cortantes conocido como factor de cizallamiento.

Teoría de viga de Timoshenko

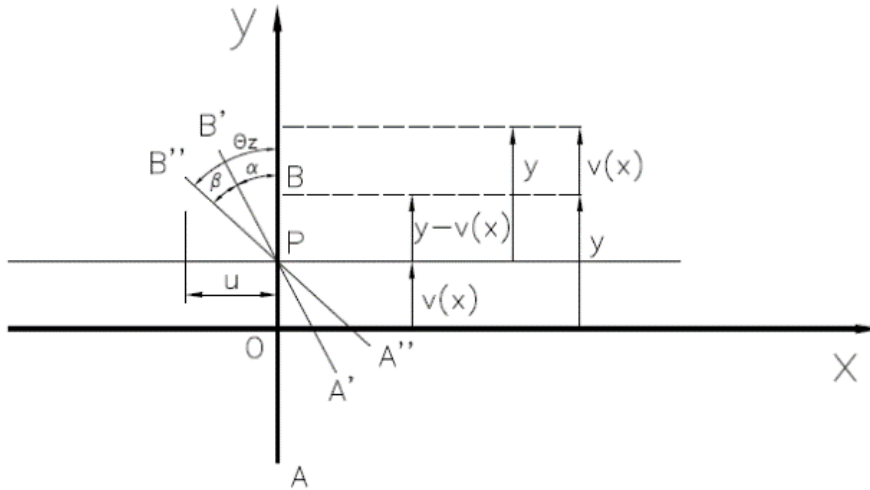
La teoría de viga de Timoshenko considera que las secciones transversales permanecen planas. Así mismo sufren de una deformación cortante $\beta(x)$ que es constante en toda la sección transversal x , posteriormente se corrige esta hipótesis mediante un factor de cizallamiento.

A partir de la figura A.2b se verifica que

$$\sin \theta_z = \frac{-u}{PB''} \quad (\text{A.10})$$



(a)



(b)

Figura A.2: a) viga de Timoshenko. b) sección transversal.

Se observa que $PB'' = PB' = y$, ocurriendo apenas deformación la sección transversal presenta variación insignificante de su tamaño, por lo tanto

$$u(x) = -y \sin \theta_z(x) \quad (\text{A.11})$$

Considerando pequeñas deformaciones, $\theta_z(x)$ es muy pequeño (deflexiones pequeñas), entonces se puede considerar $\sin \theta_z(x) = \theta_z(x)$, reexpresando (A.11) resulta en

$$u(x) = y \theta_z(x) = -y[\alpha(x) + \beta(x)] \quad (\text{A.12})$$

siendo $\theta_z(x)$ la rotación total de la sección transversal, $\alpha(x) = \frac{dv(x)}{dx}$ una rotación debida a la flexión de la viga y $\beta(x)$ una rotación debida al cizallamiento. Luego la cinemática de la viga de Timoshenko en forma matricial es

$$U(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \theta_z(x) \\ v(x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Deformación de la viga

En el modelo de vigas de Timoshenko se considera componentes de deformación axial $\epsilon_{xx}(x)$ y deformación angular $\gamma_{xy}(x)$.

Para determinar $\epsilon_{xx}(x)$ basta considerar nuevamente la figura A.1b y la variación específica $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ de deformación axial $u(x)$ de la viga entre las secciones AB y CD y luego la deformación específica $\epsilon_{xx}(x)$ es obtenida a partir de

$$\epsilon_{xx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad (\text{A.14})$$

Sustituyendo a (A.12) tenemos que

$$\epsilon_{xx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-y\theta_z(x + \Delta x) - (-y\theta_z(x))}{\Delta x} = -y \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\theta_z(x + \Delta x) - (\theta_z(x))}{\Delta x} \quad (\text{A.15})$$

Aplicando la definición de derivada, a (A.15) se convierte en

$$\epsilon_{xx}(x) = -y \frac{d\theta_z(x)}{dx} \quad (\text{A.16})$$

Las deformaciones angular de la sección transversal x se derivan a continuación. Considere un elemento diferencial de viga mostrado en la figura A.3 donde se representa los estados antes y después de la deformación, donde se observa que

$$\tan\beta_1 = \frac{\Delta u}{\Delta y} \quad (\text{A.17})$$

$$\tan\beta_2 = \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad (\text{A.18})$$

$$(\text{A.19})$$

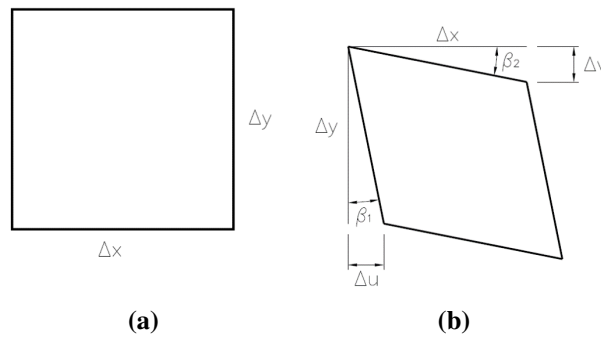


Figura A.3: a) Antes de la deformación. b) Después de la deformación.

Considerando pequeñas deformaciones $\Delta u \rightarrow 0$ y $\Delta v \rightarrow 0$, tenemos que β_1 y β_2

también son pequeños por tanto $\tan(\beta_1) \approx \beta_1$ y $\tan(\beta_2) \approx \beta_2$ y luego

$$\beta_1(x) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{du(x)}{dy} \quad (\text{A.20})$$

$$\beta_2(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv(x)}{dx} \quad (\text{A.21})$$

La deformación debido a esfuerzos cortantes se denota como $\gamma_{xy}(x)$ e indica la deformación del plano x en la dirección y , se define como

$$\gamma_{xy}(x) = \beta_1(x) + \beta_2(x) = \frac{du(x)}{dx} + \frac{dv(x)}{dx} \quad (\text{A.22})$$

Sustituyendo a (A.13) en (A.22), tenemos

$$\gamma_{xy}(x) = \theta_z(x) + \frac{dv(x)}{dx} \quad (\text{A.23})$$

En forma matricial resulta en

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ \frac{1}{y} & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -y\theta_z(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -y\frac{d\theta_z(x)}{dx} \\ \theta_z(x) + \frac{dv(x)}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}(x) \\ \gamma_{xy}(x) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

En el caso de movimientos rígidos, los componentes de deformación son nulas, por tanto

$$\epsilon_{xx}(x) = -y\frac{d\theta_z(x)}{dx} = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$\tau_{xy}(x) = \theta_z(x) + \frac{dv(x)}{dx} = 0 \quad (\text{A.26})$$

Observando la expresión (A.25), se concluye que $\theta_z(x) = \theta_z$ es constante en toda la sección x , por tanto un movimiento rígido corresponde a una rotación constante en torno al eje z

Energía de deformación

La energía de deformación permite relacionar los componentes de deformación específica $\epsilon_{xx}(x)$ y deformación angular $\gamma_{xy}(x)$ con los componentes de esfuerzo normal

$\sigma_{xx}(x)$ y esfuerzo cortante ($\tau_{xy}(x)$), las cuales representan las fuerzas internas en las direcciones x y y respectivamente, el modelo de la energía interna puede ser encontrada en [22] y esta dada por

$$U_i = - \int_V [\sigma_{xx}(x)\epsilon_{xx}(x) + \tau_{xy}(x)\gamma_{xy}(x)]dV \quad (\text{A.27})$$

Sustituyendo las componentes de deformación y descomponiendo la integral de volumen en términos del área de la sección transversal se tiene que

$$U_i = - \int_0^L [- \int_A \sigma_{xx}(x)y dA] \frac{d\theta_z(x)}{dx} - \int_0^L [- \int_A \tau_{xy}(x)dA] (\theta_z(x) + \frac{dv(x)}{dx})dx \quad (\text{A.28})$$

Reconociendo que los términos en corchetes representan el momento flector $M_z(x)$ en la dirección z y la cortante $V_y(x)$ en dirección y [22], como se puede apreciar en la figura se tiene

$$M_z(z) = - \int_A \sigma_{xx}(x)y dA \quad (\text{A.29})$$

$$V_y(x) = - \int_A \tau_{xy}(x)dA \quad (\text{A.30})$$

De esta manera, la energía interna se expresa como

$$U_i = - \int_0^L M_z(x) \frac{d\theta_z(x)}{dx} dx + \int_0^L V_y(x) \frac{dv(x)}{dx} dx - \int_0^L V_y(x)\theta_z(x)dx \quad (\text{A.31})$$

Integrando por partes las dos primeras expresiones tenemos

$$U_i = - \int_0^L \frac{dM_z(x)}{dx} \theta_z(x) dx - M_z(x)\theta_z(x)|_0^L - \int_0^L \frac{dV_y(x)}{dx} v(x) dx + V_y(x)v(x)|_0^L - \int_0^L V_y(x)\theta_z(x) dx \quad (\text{A.32})$$

Reexpresando la expresión anterior, se obtiene

$$U_i = \int_0^L \left[\frac{dM_z(x)}{dx} - V_y(x) \right] \theta_z(x) dx + \int_0^L \left[\frac{dV_y(x)}{dx} v(x) dx \right] + [-M_z(L)\theta_z(L) + M_z(0)\theta_z(0)] + [V_y(L)v_y(L) + V_y(0)v_y(0)] \quad (\text{A.33})$$

El primer término es equivalente a una densidad de momento flector $M_z(x)$, en la dirección z , o sea un momento flector distribuido por unidad de longitud. El segundo término representa una densidad de fuerza transversal, en otros términos, una distribución de fuerza cortante $V_y(x)$ en la dirección de y por unidad de longitud de la viga. Posteriormente, tenemos los momentos flectores ($M_z(L)$ y $M_z(0)$) y fuerzas cortantes ($V_y(L)$ y $V_y(0)$) concentradas en las extremidades de la viga. Estos esfuerzos internos están

ilustrados en la figura A.4

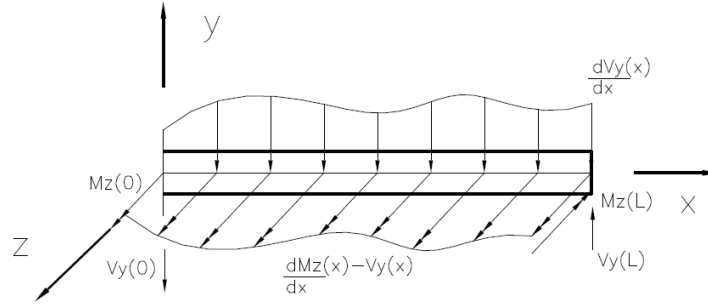


Figura A.4: Representación de esfuerzos internos en la viga.

El principio de trabajo virtual establece que la viga está en equilibrio en su configuración deformada, por tanto, la suma del trabajo de fuerzas internas y externas están en equilibrio, entonces

$$U_e + U_i = 0 \quad (\text{A.34})$$

Sustituyendo la expresión A.33 en (A.34)

$$U_e + \int_0^L \left[\frac{dM_z(x)}{dx} - V_y(x) \right] \theta_z(x) dx + \int_0^L \left[\frac{dV_y(x)}{dx} v(x) \right] dx + [-M_z(L)\theta_z(L) + M_z(0)\theta_z(0)] + [V_y(L)v_y(L) + V_y(0)v_y(0)] = 0 \quad (\text{A.35})$$

Donde U_e es un conjunto de esfuerzos externos compatible con la cinemática de la viga y que equilibra los esfuerzos internos. Para determinar U_e , el cual equilibra las fuerzas internas, basta con analizar (A.35). Para cada término de esfuerzo interno debe existir un esfuerzo externo correspondiente de tal forma que lo equilibre.

Para este caso, para equilibrar la energía interna del momento flector distribuido $\int_0^L \left[\frac{dM_z(x)}{dx} - V_y(x) \right] \theta_z(x) dx$ debe existir una distribución de energía externa que lo equilibre $\int_0^L m_z(x)\theta_z(x) dx$. De igual forma para equilibrar la energía interna $\int_0^L \left[\frac{dV_y(x)}{dx} v(x) \right] dx$ debe existir una carga distribuida transversal de tal forma que que la potencia externa $\int_0^L q(x)v(x) dx$. Finalmente, los momentos puros M_0 y M_L y las fuerzas transversales externas deben estar presentes para equilibrar los momentos flectores y fuerzas cortantes en los extremos de las vigas. A partir del análisis anterior tenemos que la energía externa es

$$U_e = \int_0^L m_z(x)\theta_z(x) dx + \int_0^L q(x)v(x) dx + M_0\theta_z(L) + M_0\theta_z(0) + V_L v(L) + V_L v(0) \quad (\text{A.36})$$

Sustituyendo (A.35) tenemos

$$\int_0^L \left[\frac{dM_z(x)}{dx} - V_y(x) + m_z(x) \right] \theta_z(x) dx + \int_0^L \left[\frac{dV_y(x)}{dx} + q(x) \right] v(x) dx + [-M_z(L) + M_L] \theta_z(L) + [M_z(0) + M_0] \theta_z(0) + [V_y(L) + V_L] v_y(L) + [V_y(0) + V_0] v_y(0) = 0 \quad (\text{A.37})$$

Dado que el principio de trabajo virtual establece que la viga esta en equilibrio en su estado deformado, entonces, los términos que están entre corchetes están en equilibrio, esto es

$$\frac{dM_z(x)}{dx} - V_y(x) + m_z(x) = 0 \quad x \in (0, L) \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{dV_y(x)}{dx} + q(x) = 0 \quad x \in (0, L) \quad (\text{A.39})$$

$$V_y(0) = V_0 \quad x = 0 \quad (\text{A.40})$$

$$V_y(L) = -V_L \quad x = L \quad (\text{A.41})$$

$$M_z(0) = -M_0 \quad x = 0 \quad (\text{A.42})$$

$$M_z(L) = M_L \quad x = L \quad (\text{A.43})$$

$$(\text{A.44})$$

La ley de Hooke para un material elástico lineal isotrópico establece que el esfuerzo normal σ_{xx} esta relacionada con la deformación ϵ_{xx} mediante el módulo de elasticidad $E(x)$. A si mismo, el esfuerzo cortante $\tau_{xy}(x)$ está relacionada con la deformacion angular $\gamma_{xy}(x)$ a través del módulo de elasticidad transversal $G(x)$ de la sección.

$$\sigma_{xx}(x) = E(x)\epsilon_{xx} \quad (\text{A.45})$$

$$\tau_{xy}(x) = G(x)\gamma_{xy}(x) \quad (\text{A.46})$$

Sustituyendo los componentes de deformación de las relaciones anteriores, tenemos que

$$\sigma_{xx} = E(x)y \frac{d\theta_z(x)}{dx} \quad (\text{A.47})$$

$$\tau_{xy}(x) = G(x) \left[\frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right] \quad (\text{A.48})$$

Sustituyendo la expresión (A.45) en (A.29), resulta en

$$M_z(x) = E(x) \frac{d\theta_z(x)}{dx} \int_A y^2 dA = E(x) I_z(x) \frac{d\theta_z(x)}{dx} \quad (\text{A.49})$$

Siendo $I_z(x) = \int_A y^2 dA$ el momento de inercia de área de la sección transversal en relación al eje z del sistema d referencia.

A partir de la expresión anterior se obtiene la siguiente relación para la derivada de θ_z

$$\frac{d\theta_z(x)}{dx} = \frac{M_z(x)}{E(x) I_z(x)} \quad (\text{A.50})$$

El cual sustituida en (A.48) resulta en

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z(x)}{I_z(x)}y \quad (\text{A.51})$$

luego se concluye que el esfuerzo normal varia linealmente en la sección transversal de una viga, tanto de Euler-Bernoulli como tambien de Timoshenko. Análogamente

$$V_y(x) = - \int_A G(x) \left[\frac{dc(x)}{dx} - \theta_z \right] dA = G(x) \left[\frac{dc(x)}{dx} - \theta_z \right] \int_A dA = \left[\frac{dv(x)}{dx} - \theta_z \right] G(x)A(x) \quad (\text{A.52})$$

Donde $A(x)$ es el área de la sección transversal x , de la cinemática de la viga de Timoshenko se observa que $-\left[\frac{dv(x)}{dx} - \theta_z \right] = \beta(x)$, sustituyendo en la expresión anterior resulta en

$$V_y(x) = G(x)A(x)\beta(x) \quad (\text{A.53})$$

a partir de ésta relación se tiene,

$$\beta(x) = \frac{V_y(x)}{G(x)A(x)} \quad (\text{A.54})$$

El cual sustituido en (A.48) podemos encontrar una función de deformación cortante en función del esfuerzo cortante. De este modelo se puede observar que el esfuerzo cortante debe ser constante en la sección transversal especialmente $\tau_{xy} \neq 0$ el esfuerzo cortante debe ser diferente a cero en la superficie superior e inferior de la viga que se contrapone con la realidad. En realidad la superficie inferior y superior de la viga es cero $\tau_{xy} = 0$ por lo tanto el modelo de esfuerzo cortante de la viga de Timoshenko no es exacta debido a las consideraciones realizadas, por tanto, se debe agrega un factor adimensional de corrección a los esfuerzos cortante K_c [21]. La definición más comúnmente aceptada es que K_c es la relación entre la deformación cortante media $\frac{V_y(x)}{G(x)A(x)}$ y la deformación real $\gamma_{xy}(x)$, por tanto

$$K_c = \frac{V_y(x)}{G(x)A(x)} \frac{1}{\gamma_{xy}} \quad (\text{A.55})$$

Luego aplicando esta corrección a la expresión (A.53) , resulta en

$$V_y(x) = K_c G(x)A(x)\beta(x)\tau_{xy}(x) = -\frac{V_y(x)}{K_c A(x)} \quad (\text{A.56})$$

Sustituyendo las ecuaciones A.49 y A.53 en las ecuaciones diferenciales A.38 y A.39 tenemos

$$\frac{d}{dx} \left\{ E(x)I_z(x) \frac{d\theta_z(x)}{dx} \right\} + K_c A(x)G(x) \left\{ \frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right\} + m_z(x) \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{d}{dx} \left[K_c A(x)G(x) \left\{ \frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right\} \right] - q(x) \quad (\text{A.58})$$

Las expresiones anteriores constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales que están

acopladas por el término $K_c A(x)G(x) \left\{ \frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right\}$ que aparece en ambas ecuaciones. Considerando que el momento distribuido es cero $m_z = 0$ y las propiedades del material en la sección transversal son constantes $E(x) = E, I_z(x) = I, A(x) = A, G(x) = G$, entonces se tiene que

$$EI_z \frac{d^2 \theta_z(x)}{dx^2} + K_c AG \left(\frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right) = 0 \quad (\text{A.59})$$

$$K_c AG \left(\frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right) - q(x) = 0 \quad (\text{A.60})$$

El sistema de ecuaciones diferenciales puede ser escrito como dos ecuaciones independientes

$$EI_z \frac{d^3 \theta_z(x)}{dx^3} + K_c AG \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2} - \frac{d\theta_z(x)}{dx} \right) = 0 \quad (\text{A.61})$$

$$K_c AG \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2} - \frac{d\theta_z(x)}{dx} \right) = -EI_z \frac{d^3 \theta_z(x)}{dx^3} \quad (\text{A.62})$$

Sustituyendo las dos expresiones en (A.59) se obtiene

$$EI_z = \frac{d^3 \theta_z(x)}{dx^3} + q(x) \quad (\text{A.63})$$

diferenciando dos veces a (A.60) en términos de $v(x)$

$$K_c AG \left(\frac{d^4 v(x)}{dx^4} - \frac{d^3 \theta_z(x)}{dx^3} \right) - \frac{d^2 q(x)}{dx^2} = 0 \quad (\text{A.64})$$

Introduciendo $\frac{d^3 \theta_z(x)}{dx^3} = -\frac{q(x)}{EI_z}$, tenemos que

$$K_c AG \left(\frac{d^4 v(x)}{dx^4} \right) + \frac{K_c GA}{EI_z} q(x) - \frac{d^2 q(x)}{dx^2} = 0 \quad (\text{A.65})$$

Multiplicando la expresión anterior por el factor $\frac{EI_z}{K_c GA}$, obtenemos la expresión final que relaciona la deflexión $v(x)$ con las cargas transversales $q(x)$, para una viga de Timoshenko

$$EI_z \frac{d^4 v(x)}{dx^4} + \frac{EI_z}{K_c GA} \frac{d^2 q(x)}{dx^2} + q(x) = 0 \quad (\text{A.66})$$

Apéndice B

Propiedades del álabo

Tabla B.1: Propiedades seccionales y geometría del álabo.

Geometría			Propiedades seccionales			
Radio (m)	Cuerda (m)	Torsión (°)	EA (Nm ²)	EI_y (Nm ²)	EI_z (Nm ²)	GJ (Nm ²)
0.563834	0.270036	10.6054	77119600	350582	28273.2	142427
0.651131	0.263376	10.1378	72596300	314100	25341.5	127610
0.738429	0.256716	9.67025	68541000	284345	22961.8	115529
0.825726	0.250055	9.20266	64261300	253145	20451	102855
0.913023	0.243395	8.73508	60110100	224554	18150.1	91242.2
1.00032	0.236735	8.26749	56382400	201396	16289.4	81836.7
1.08762	0.230074	7.79991	51808700	175021	14454.47	69351.7
1.17492	0.223414	7.33232	48118400	153527	12804.31	60838.7
1.26221	0.216753	6.86474	44799700	136234	11738.46	53990.9
1.34951	0.210093	6.39715	41355800	118414	10642.9	46932
1.43681	0.203433	5.92957	38037900	102380	9556.2	40579.9
1.5241	0.196772	5.46198	35059800	89563	8487.06	35503
1.6114	0.190112	4.9944	31976300	76524.9	7417.52	30337
1.6987	0.183451	4.52681	29032900	64936.2	6354.38	25744.9
1.786	0.176791	4.05922	26387100	55757.4	5304.97	22108
1.87329	0.170131	3.59164	23686400	46590.8	4252.09	18474.8
1.96059	0.16347	3.12405	21103400	38541.7	3214.88	15284.4
2.04789	0.15681	2.65647	18796600	32258.6	2172.52	12793.7
2.13519	0.150149	2.18888	16461700	26103.1	1436.37	10353.2
2.22248	0.143489	1.7213	14255000	20834.5	1147.24	8263.8
2.30978	0.136829	1.25371	12279800	16760.4	923.33	6648.02
2.39708	0.130168	0.786127	10317000	12912.9	710.752	5121.69
2.48437	0.123508	0.318541	8555890	9961.66	547.689	3950.88
2.57167	0.116847	-0.149044	6832860	7254.93	397.562	2876.88
2.65897	0.110187	-0.61663	5229390	5048.33	275.329	2001.38
2.74627	0.103527	-1.08422	3786110	3381.35	183.153	1340.04
2.83356	0.0968662	-1.5518	2392100	1915.66	104.33	759.395
2.92086	0.0902058	-2.01939	1117180	782.78	44.1724	310.884
3.00816	0.0835454	-2.48697	1042330	634.909	35.7489	252.127
3.09546	0.076885	-2.95456	957009	489.703	27.3983	194.399
3.18275	0.0702246	-3.42214	868652	366.651	20.3992	145.508

Análisis de posición con el método de Denavit-Hartenberg

Para definir posición y orientación del órgano terminal (OT) a través de eslabones intermedios se hace uso de transformaciones afines (Ángeles [26]) que consiste en traslaciones de puntos coordenados y rotaciones de ejes coordenados.

El método de Denavit-Hartenberg [25], emplea ecuaciones de cerradura para realizar las transformaciones afines [24]. Se basa en las siguientes consideraciones para definir los ejes unitarios en cada uno de los eslabones (ver figura C.1 [24]).

Z_i : Es el eje del par que conecta los eslabones i e $i + 1$. Se elige como:

- a) el eje de rotación si el par asociado es rotatorio (R).
- b) la dirección de traslación si el par asociado es prismático (P).

X_i : Es la perpendicular común a Z_{i-1} y Z_i dirigida de Z_{i-1} a Z_i .

Y_i : Completa el sistema coordenado dextrogiro del i -ésimo eslabón.

La posición relativa de dos eslabones adyacentes está definida por los siguientes parámetros:

d_i : Es la distancia entre los ejes Z_i y Z_{i+1} , siempre positiva y medida sobre X_{i+1} .

α : Es el ángulo entre Z_i y Z_{i+1} , medida en la dirección positiva de X_{i+1} .

Además se tienen las siguientes variables:

b_i : Es la distancia correspondiente a la coordenada Z_i hasta la intersección de los ejes X_{i+1} y Z_i . Es constante si el par es de rotación y variable si el par es prismático.

θ_i : Es el ángulo entre los ejes X_i y X_{i+1} , medido en la dirección positiva de Z_i , es constante cuando el par es prismático y variable si el par es de rotación.

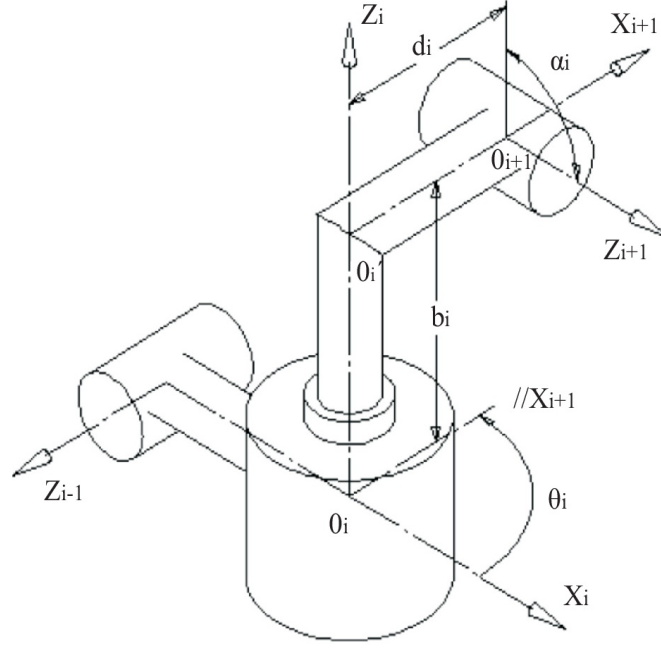


Figura C.1: Parámetros y variables que definen una cadena cinemática.

La matriz $[Q_{i,i+1}]_i$ denota una rotación que lleva el sistema coordenado (X_i, Y_i, Z_i) a coincidir con el sistema $(X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1})$. El subíndice del paréntesis rectangular indica que esta matriz está representada en el sistema (X_i, Y_i, Z_i) . Esta matriz se obtiene mediante la composición de dos rotaciones, una de un ángulo θ_i alrededor de Z_i , que transforma X_i, Y_i en X'_i, Y'_i , respectivamente, seguida de un ángulo α_i alrededor de X'_i [26]. Así se obtiene:

$$[Q_{i,i+1}]_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

donde c denota el coseno y s denota seno; el vector de traslación se forma como:

$$[\mathbf{a}_{i,i+1}]_i = [\overrightarrow{O_i O'_i}]_i + [Q_{i,i+1}]_i [\overrightarrow{O'_i O_{i+1}}]_{i+1} \quad (C.2)$$

con

$$[\overrightarrow{O_i O'_i}]_i = [0, 0, b_i]^T \quad (C.3)$$

$$[\overrightarrow{O'_i O_{i+1}}]_{i+1} = [d_i, 0, 0]^T \quad (C.4)$$

obteniéndose

$$[\mathbf{a}_{i,i+1}]_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_i c\theta_i \\ d_i s\theta_i \\ b_i \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

que es la expresión para el vector que une los orígenes de los sistemas i e $i + 1$.

Bibliografía

- [1] Wua, Z., & Wang, H., 2012, “Research on Active Yaw Mechanism of Small Wind Turbines,” International Conference on Future Energy, Environment, and Materials, Vol. 16, pp. 53-57.
- [2] Younsi, R., El-Batanony, I., Naji, H., and Landjerit, B.,2001,“Dynamic study of a wind turbine blade with horizontal,” European Journal of Mechanics - A/Solids, Vol. 20, No. 2, pp. 241-252.
- [3] Hamdi, H., Mrad, C., Nasri, R., 2012, “Effects of Gyroscopic Coupling on the Dynamics of a Wind Turbine Blade with Horizontal Axis,” Fakhfakh T., Bartelmus W., Chaari F., Zimroz R., Haddar M. (eds) Condition Monitoring of Machinery in Non-Stationary Operations. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [4] Hamdi H., Mrad C., Nasri R., 2014, “Dynamic response of a horizontal axis wind turbine blade under aerodynamic, gravity and gyroscopic effects,” Applied Acoustics. Vol. 86. Pag. 154–164.
- [5] Hamdi, H., 2018, “Beam finite element model of a vibrate wind blade in large elastic deformation,” Wind and Structures An International Journal.Vol. 26.
- [6] Li, L.,Li, Y.H., Liu,Q.K., Lv, H.W., 2013, “A mathematical model for horizontal axis wind turbine blades,“Applied mathematical modelling ”. Vol. 86, pp. 2695-2715, 2014.
- [7] Manwell, J. F., McGowan J. G., and Rogers, A. L., 2009, *Wind Energy Explained: Theory, Design and Application*, Second edition ed. England: John Wiley & Sons.
- [8] Tong, W., 2011, *Wind Power Generation and Wind Turbine Design*, USA, Kollmorgen Corp, ISBN:978-1-84564-205-1.
- [9] Burton, T., Jenkins, N., Sharpe, D., & Bossanyi, E., 2011, *Wind Energy Handbook*, Second edition, Ltd. Published by John Wiley & Sons.
- [10] Hansen, M. L., 2008, *Aerodynamics of Wind Turbines*, Second edition published by Earthscan in the UK and USA.
- [11] Lysen, E. H., 1983, *Introduction to Wind Energy*, second edition, CWD 82-1.
- [12] Kulunk, E., 2011, *Aerodynamics of Wind Turbines, Fundamental and Advanced Topics in Wind Power*, Dr.Rupp Carriveau (Ed.), ISBN: 978-953-307-508-2, InTech.

- [13] Jamieson, P., 2018, *Innovation in Wind Turbine Design*, second edition, Ltd. Published by John Wiley & Sons, 79-91.
- [14] Timmer, W. A., & Bak, C., 2013, *Aerodynamic characteristics of wind turbine blade airfoils*, *Advances in Wind Turbine Blade Design and Materials*, 109–149.
- [15] Seki, K., Shimizu, Y., & Zhu, K., 1996, “A design strategy for the improvement of an existing 300KW WTGS rotor blade,” *Renewable Energy* , 9(1-4), 858–861.
- [16] Maalawi, K.Y., Badr, M.A., 2003, *A practical approach for selecting optimum wind rotors*, *Renewable Energy* , 28, 803–822.
- [17] Hau, E., 2006, *Wind Turbines: Fundamentals, Technologies, Application, Economics*.
- [18] Azad, A.K, Kaysar, M. M., “Design of a horizontal axis wind turbines for electricity generation in low speed windy sites,” *International journal of advance renewable energy research*, vol. 1, no. 6, pp. 363-373.
- [19] Logan, D. L., 2017, *A first Course in the Finite Element Method*, six edition published by CENGAGE Learning, USA.
- [20] Juarez-Luna, G., *Elemento Viga de Timoshenko*, [Lecture Notes S21], disponible en: <http://materiales.azc.uam.mx/gjl/Clases/EF10/index.htm>, Consultado el 25-05-2019.
- [21] Andersen, L., and Nielsen, S. R.K., 2008, *Elastic Beams in Three Dimensions*, Department of Civil Engineering, Aalborg University.
- [22] Beer, F.P., and Johnston, E.R., 2010, *Mecánica de materiales*, MCGraw Hill. 5ta Edición, Mexico.
- [23] Hibbeler, J., 2010, *Ingeniería mecánica dinámica*, Prentice Hall. 12a Edición, México.
- [24] Rojas, S. A., 1989, “Dinámica de sistemas articulados de cuerpos rígidos,” Tesis doctoral, DEPMI, UNAM.
- [25] Denavit, J. and Hartenberg, R.S., 1955, “A kinematic rotation for lower-pair mechanisms based on matrices,” *ASME Journal Applied Mechanics* 22, pp. 215-221.
- [26] Angeles, J., 2007, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*, Third edition, Ed. Springer, pag. 201-232.
- [27] Meirovich, L., 1985, *Introduction to dynamics and control*, Ed. John Wiley and Sons, pag. 323-351.
- [28] Baruh, H., 1999, *Analytical dynamics*, Ed. McGraw-Hill, pag. 323-351.
- [29] Silver, W. M., 1982, “On the equivalence of Lagrangian and Newton-Euler Dynamics for Manipulators,” *The International Journal of Robotics Research*. Vol. 1, No.2, pp.60-70.